# Geometría

Geometría

Intelectum
EVOLUCIÓN







# Indicadores de logro

## Unidad 1

- Define el triángulo no euclidiano y sus elementos, así como sus puntos notables.
- Discrimina entre triángulos elípticos e hiperbólicos.
- Utiliza las propiedades de cada punto notable en el triángulo al calcular la longitud de lados y medidas de sus ángulos.
- Reconoce los triángulos rectángulos aproximados, exactos y pitagóricos.
- Utiliza las relaciones de medidas de los lados de triángulos rectángulos aproximados y exactos para la resolución de problemas.
- Identifica los casos de semejanza de triángulos y sus elementos homólogos.
- Calcula longitudes de segmentos utilizando proporcionalidad y semejanza.
- Interpreta las relaciones asociadas a la cuaterna armónica y analiza sus teoremas.
- Identifica relaciones métricas en triángulos y circunferencias.

## Unidad 2

- Analiza los distintos polígonos regulares notables y sus elementos.
- Representa gráficamente los distintos polígonos regulares.
- Calcula las medidas de ángulos internos, ángulos externos y la medida de su apotema.
- Evalúa los distintos teoremas para determinar el área de una región triangular.
- Determina el área de regiones triangulares utilizando su perímetro, la medida de un ángulo interno o el radio de una circunferencia inscrita o circunscrita.
- Identifica las regiones cuadrangulares convexas y cóncavas.
- Calcula el área de una región trapecial, rombal y de cuadriláteros circunscritos, inscritos y exinscritos.
- Identifica y define un sector circular, segmento circular y corona circular.
- Calcula el valor de distintas secciones de una región circular, reconociendo sus elementos.

### GEOMETRÍA PROYECTIVA

*Siempre hemos escuchado que dos rectas paralelas son aquellas que por mucho que se prolonguen nunca llegan a cortarse, pero también conocemos el concepto de que dos rectas paralelas se cortan en el infinito. ¿Cuál de estas dos afirmaciones es verdadera?*

*La geometría euclidiana es aquella que estudia las propiedades del plano y el espacio tridimensional. La presentación de esta se hace mediante un sistema de axiomas que, a partir de un cierto número de postulados que se presumen verdaderos y a través de operaciones lógicas, genera nuevos postulados cuyo valor de verdad es también positivo. Euclides planteó cinco postulados en su sistema. El último postulado, que es conocido como el postulado de las paralelas, fue reformulado así:*

*Por un punto exterior a una recta, se puede trazar una única paralela a la recta dada.*

*Las geometrías donde el quinto postulado no se cumple se llaman geometrías no euclidianas.*



# Contenido:

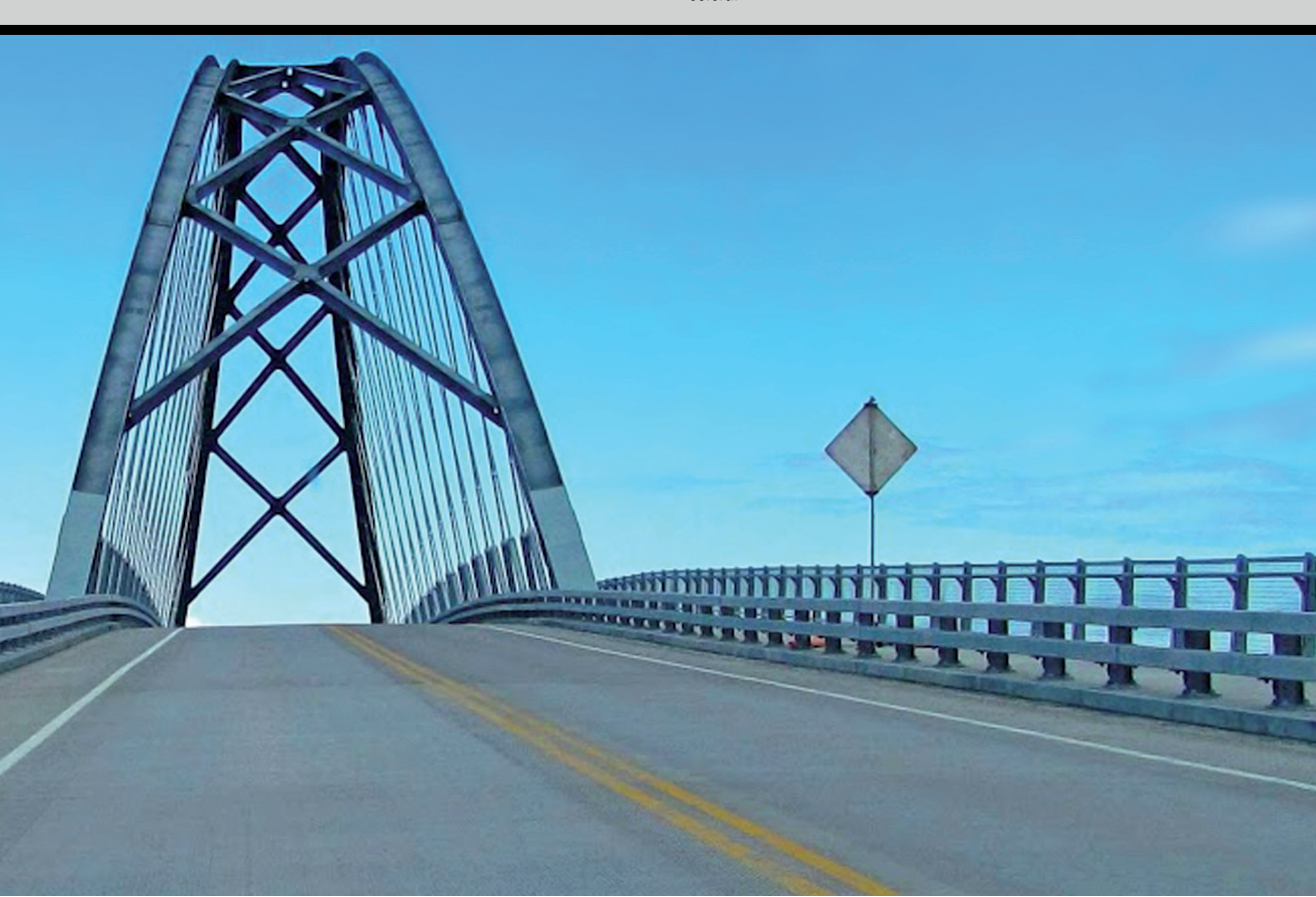


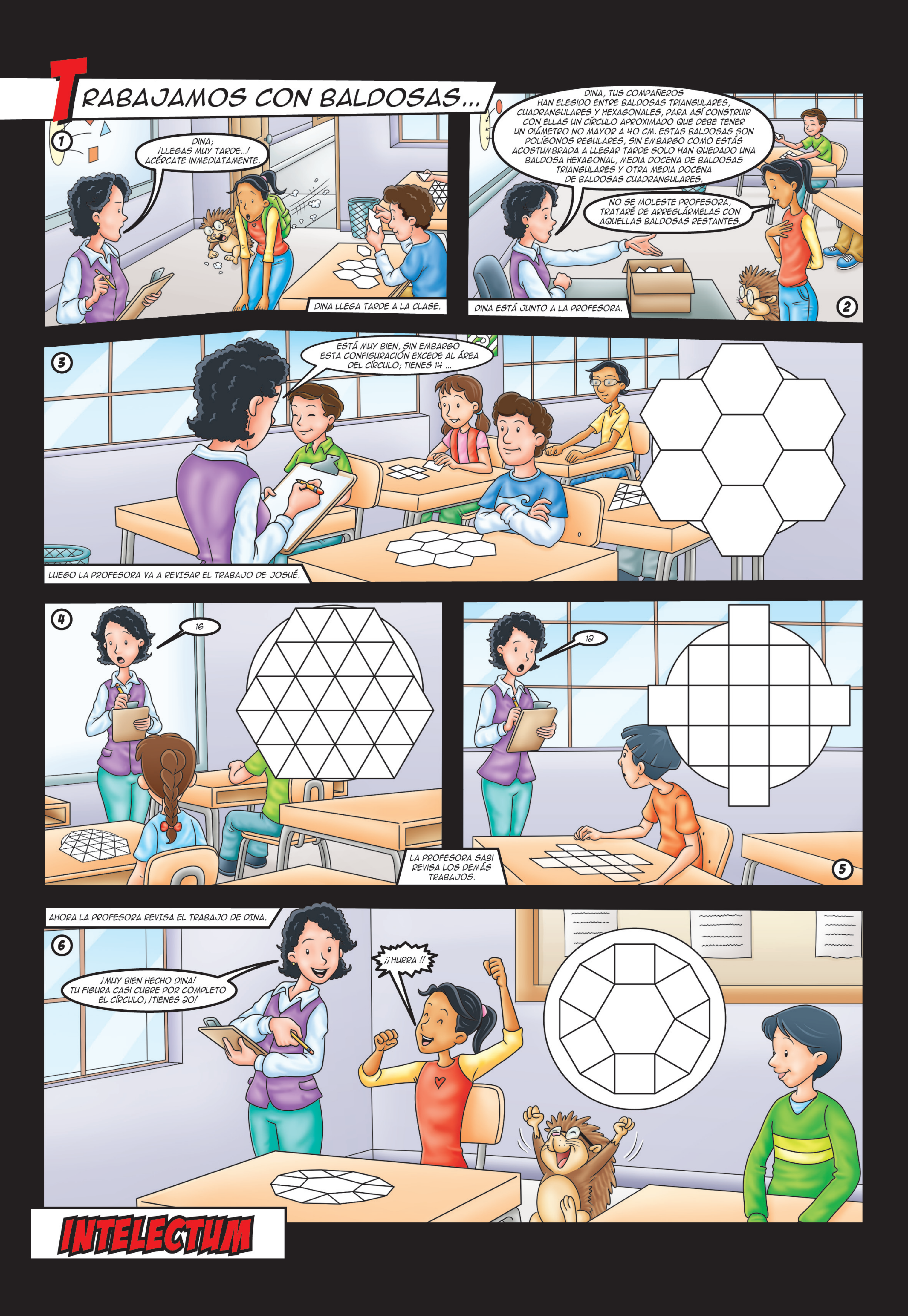
## Unidad 3

- Define elementos geométricos del espacio e identifica conceptos referentes al plano en el espacio y sus posiciones relativas.
- Analiza las proyecciones de un punto y una recta sobre el plano.
- Aplica el Teorema de Thales y el teorema de las paralelas en los problemas propuestos.
- Define ángulos diedros y triedros, además los reconoce gráficamente.
- Discrimina entre poliedro convexo y cóncavo.
- Interpreta los teoremas referente a poliedros regulares y conjugados.
- Calcula el área total, volumen y la medida de la apotema de cada uno de los poliedros regulares.
- Representa gráficamente cada uno de los poliedros.
- Identifica una superficie prismática y cilíndrica, y evalúa las principales características en cada caso.
- Calcula el valor de los principales elementos de una superficie prismática y cilíndrica.

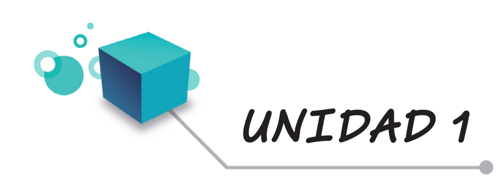
## Unidad 4

- Discrimina entre pirámide regular e irregular y reconoce gráficamente cada uno de sus elementos.
- Evalúa teoremas relacionando pirámides con planos paralelos a su base.
- Calcula el valor de la apotema, del área total, lateral y el volumen de la pirámide.
- Representa gráficamente el tronco de una pirámide regular y de una irregular.
- Identifica conos oblicuos y rectos, además de sus características.
- Determina el valor del volumen y de la superficie de un cono identificando sus elementos.
- Calcula el área lateral de un cono de revolución.
- Aplica las propiedades de sólidos de revolución para la resolución de problemas.
- Analiza la superficie esférica e interpreta el teorema de Pappus- Guldin.
- Determina el área lateral y el volumen de distintas secciones de una esfera.





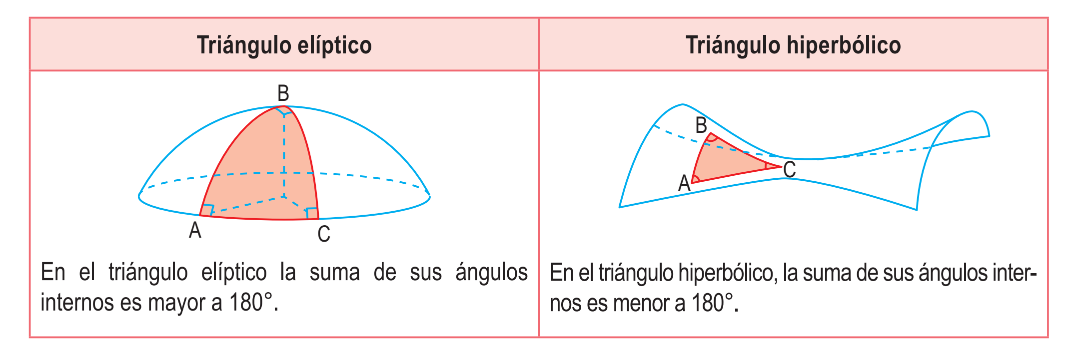
TRABAJAMOS CON BALDOSAS...
1
DINA; ¡LLEGAS MUY TARDE...! ACÉRCATE INMEDIATAMENTE.
DINA LLEGA TARDE A LA CLASE.
DINA, TUS COMPAÑEROS HAN ELEGIDO ENTRE BALDOSAS TRIANGULARES, CUADRANGULARES Y HEXAGONALES, PARA ASÍ CONSTRUIR CON ELLAS UN CÍRCULO APROXIMADO QUE DEBE TENER UN DIÁMETRO NO MAYOR A 40 CM. ESTAS BALDOSAS SON POLÍGONOS REGULARES, SIN EMBARGO COMO ESTÁS ACOSTUMBRADA A LLEGAR TARDE SOLO HAN QUEDADO UNA BALDOSA HEXAGONAL, MEDIA DOCENA DE BALDOSAS TRIANGULARES Y OTRA MEDIA DOCENA DE BALDOSAS CUADRANGULARES.
NO SE MOLESTE PROFESORA, TRATARÉ DE ARREGLÁRMELAS CON AQUELLAS BALDOSAS RESTANTES.
DINA ESTÁ JUNTO A LA PROFESORA.
2
3
ESTÁ MUY BIEN, SIN EMBARGO ESTA CONFIGURACIÓN EXCEDE AL ÁREA DEL CÍRCULO; TIENES 14 ...
LUEGO LA PROFESORA VA A REVISAR EL TRABAJO DE JOSUÉ.
4
16
12
LA PROFESORA SABI REVISA LOS DEMÁS TRABAJOS.
5
AHORA LA PROFESORA REVISA EL TRABAJO DE DINA.
6
¡MUY BIEN HECHO DINA! TU FIGURA CASI CUBRE POR COMPLETO EL CÍRCULO; ¡TIENES 20!
¡¡HURRA !!
INTELECTUM






# TRIÁNGULOS

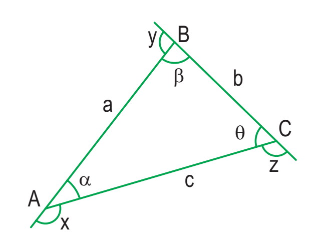
Existen, además de la geometría plana, otros tipos de geometría en donde también existen otros tipos de triángulos; por ejemplo:




| Triángulo elíptico | Triángulo hiperbólico |
|---|---|
| En el triángulo elíptico la suma de sus ángulos internos es mayor a 180°. | En el triángulo hiperbólico, la suma de sus ángulos internos es menor a 180°. |

## TRIÁNGULO PARABÓLICO

Es el triángulo clásico y que se define como la reunión de los segmentos de recta que determinan tres puntos no colineales o como un polígono de tres lados, además la suma de sus ángulos internos es 180°.




Elementos:

$\overline{AB}$; $\overline{BC}$; $\overline{AC}$ son los lados.

A; B; C son los vértices.

$\alpha, \beta; \theta$ son las medidas de los ángulos internos.

a; b; c son las longitudes de los lados.

x; y; z son las medidas de los ángulos externos.

Para que el $\triangle ABC$ exista se debe cumplir el teorema de **desigualdad triangular**; el cual postula las siguientes desigualdades:

$$b - c < a < b + c \quad ; \quad c - a < b < c + a \quad ; \quad b - a < c < b + a$$

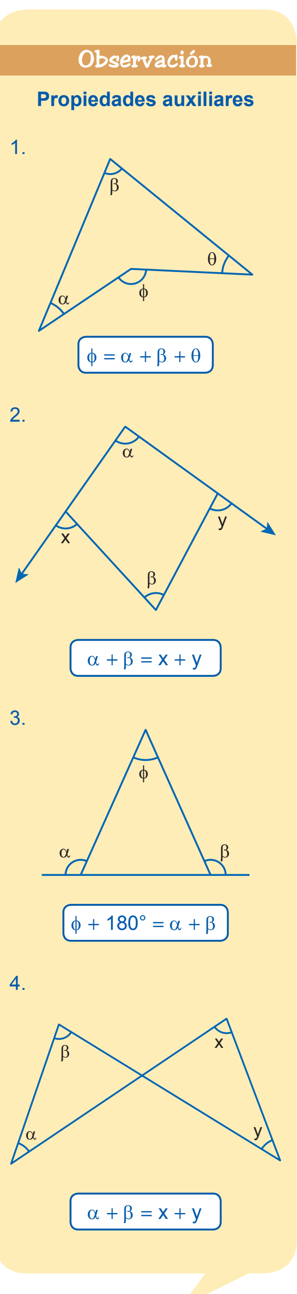
Si además se sabe que $a < c < b$

∴ Concluimos que en todo triángulo se cumple que cualquier lado es siempre menor que la suma de los otros dos y mayor que su diferencia.

### Teorema de correspondencia

El tamaño de un ángulo interno determina la magnitud del lado opuesto, así se definen tres tipos de triángulos:

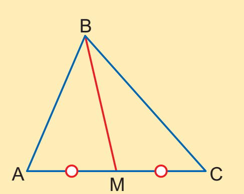
| Escaleno | Isósceles | Equilátero |
|---|---|---|
| Si: $BC > AC > AB$<br>$\Rightarrow \alpha > \beta > \theta$ | Si: $AB = BC$<br>$\Rightarrow \alpha = \theta$ | Si: $AB = BC = AC$<br>$\Rightarrow \alpha = \beta = \theta = 60°$ |



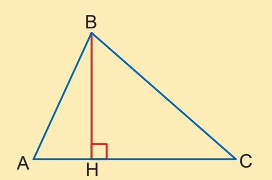



**Recuerda**

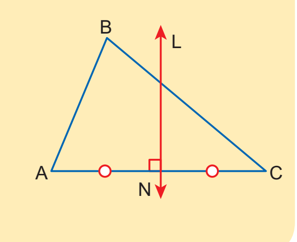
**Mediana**
En el $\triangle$ ABC, si AM = MC; entonces $\overline{BM}$ es mediana relativa a $\overline{AC}$.




**Altura**
En el $\triangle$ ABC, si $\overline{BH} \perp \overline{AC}$; entonces $\overline{BH}$ es altura relativa a $\overline{AC}$.




**Mediatriz**
En el $\triangle$ABC, si $\overleftrightarrow{L} \perp \overline{AC}$ y AN=NC, entonces $\overleftrightarrow{L}$ es mediatriz de $\overline{AC}$.






## Teorema de Pitágoras

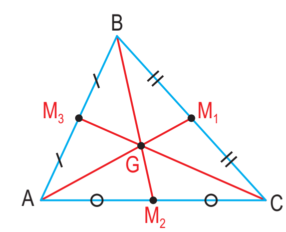
El cuadrado de la medida de un lado y su relación con la suma de los cuadrados de los otros dos lados determinan tres tipos de triángulos:

| Acutángulo | Rectángulo | Obtusángulo |
|---|---|---|
| c, a, α, b<br>Si: $a^2 < b^2 + c^2$<br>$\Rightarrow \alpha < 90°$ | c, a, α, b<br>Si: $a^2 = b^2 + c^2$<br>$\Rightarrow \alpha = 90°$ | c, a, α, b<br>Si: $a^2 > c^2 + b^2$<br>$\Rightarrow \alpha > 90°$ |

## PUNTOS NOTABLES

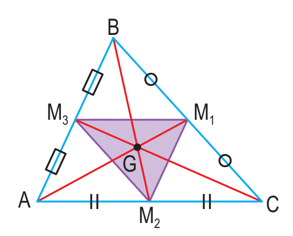
### 1. Baricentro (G)

Es el punto de concurrencia de las tres medianas de un triángulo, además el baricentro se encuentra siempre dentro de la región triangular.




Si: $\overline{AM_1}$; $\overline{BM_2}$ y $\overline{CM_3}$ son medianas:
$\Rightarrow$ G es baricentro del $\triangle$ ABC
Se cumple:
$AG = 2GM_1$ ; $BG = 2GM_2$ ; $CG = 2GM_3$
Además, G es baricentro del $\triangle M_1M_2M_3$

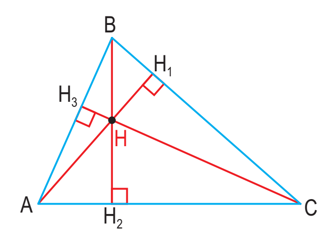
Si unimos los puntos medios de cada lado de un triángulo se obtiene un triángulo complementario llamado **triángulo mediano.**




$\Rightarrow$ El $\triangle M_1M_2M_3$ es el triángulo mediano del $\triangle$ ABC

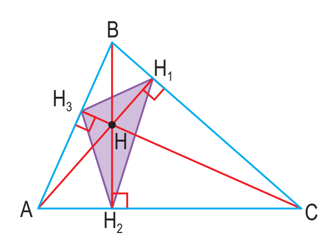
### 2. Ortocentro (H)

Es el punto de concurrencia de las tres alturas de un triángulo; en un triángulo acutángulo está dentro del triángulo, en un triángulo rectángulo está en el vértice del ángulo recto y en un triángulo obtusángulo está fuera de la región triangular.




Si: $\overline{AH_1}$; $\overline{BH_2}$ y $\overline{CH_3}$ son alturas:
$\Rightarrow$ H es el ortocentro del $\triangle$ABC.
Además; H es el incentro del $\triangle H_1H_2H_3$

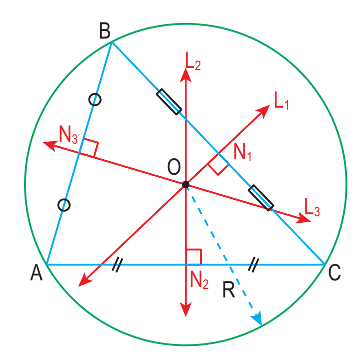
Al unir los pies de las alturas de un triángulo obtenemos el **triángulo órtico**.




$\Rightarrow$ El triángulo $H_1H_2H_3$ es el triángulo órtico del $\triangle$ ABC

## 3. Circuncentro (O)

Es el punto de concurrencia de las tres mediatrices de cada lado de un triángulo. El circuncentro es el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo y cuyo radio se denomina circunradio. Será un punto interior en un triángulo acutángulo, un punto exterior en un triángulo obtusángulo y el punto medio de la hipotenusa en un triángulo rectángulo.




Si: $\overleftrightarrow{L_1}$; $\overleftrightarrow{L_2}$ y $\overleftrightarrow{L_3}$ son mediatrices:

⇒ O es el circuncentro del △ ABC.

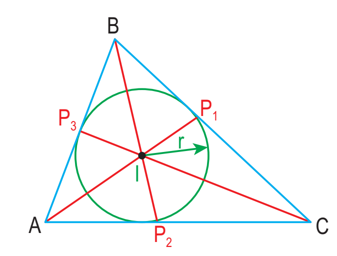
R es el circunradio del △ ABC.

Se cumple:

$AO = BO = CO = R$

## 4. Incentro (I)

Es el punto de concurrencia de las tres bisectrices interiores de un triángulo, además el incentro siempre se encuentra dentro de la región triangular y es el centro de la circunferencia inscrita en el triángulo cuyo radio se denomina inradio.

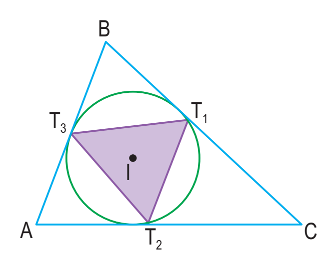



Si: $\overline{AP_1}$; $\overline{BP_2}$ y $\overline{CP_3}$ son bisectrices:

⇒ I es el incentro del △ABC

r es el inradio del △ABC

Al unir los puntos de tangencia entre una circunferencia inscrita en un triángulo y los lados del mismo, se genera el **triángulo tangencial**.

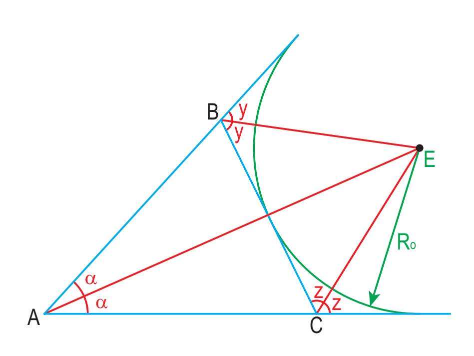



⇒ El $\triangle T_1T_2T_3$ es el triángulo tangencial del △ABC

Todo triángulo tangencial es acutángulo, además, I es el circuncentro del $\triangle T_1T_2T_3$

## 5. Excentro (E)

Es el punto de concurrencia de dos bisectrices exteriores y una bisectriz interior. El excentro será el centro de la circunferencia exinscrita relativa al lado opuesto a la bisectriz interior que lo origina, por lo tanto todo triángulo posee tres excentros y tres circunferencias exinscritas. El radio de la circunferencia exinscrita se denomina exradio.




Si: $\overline{AE}$; $\overline{BE}$ y $\overline{CE}$ son bisectrices:

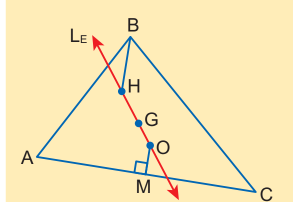
⇒ E es el excentro relativo a $\overline{BC}$

$R_o$ es el exradio relativo a $\overline{BC}$

**Atención**

**Recta de Euler**

Es aquella recta que contiene al baricentro, circuncentro y ortocentro de un mismo triángulo




Si O, H y G son los respectivos circuncentro, ortocentro y baricentro del △ABC.

⇒ $\overleftrightarrow{L_E}$: recta de Euler del △ABC

Además se cumple:

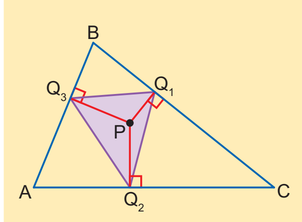
$HG = 2GO$ ∧ $BH = 2OM$



**Observación**

**Triángulo pedal**

Es el triángulo que se forma al unir los pies de las alturas que han sido trazadas desde un punto P, que puede ubicarse en el interior o exterior de un triángulo dado.




P es un punto cualquiera.

⇒ El $\triangle Q_1Q_2Q_3$ es el triángulo pedal del △ABC.

Si P coincide con el ortocentro, entonces el △ pedal será el △órtico.

Si P coincide con el circuncentro, entonces el △ pedal será el △mediano.

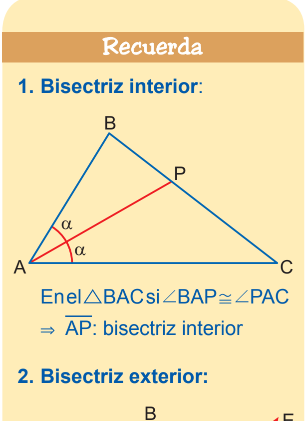
Si P coincide con el incentro, entonces el △pedal será el △ tangencial.

Al unir los tres excentros relativos a cada lado se obtiene el **triángulo exincentral.**

⇒ El $\triangle E_1E_2E_3$ es el triángulo exincentral del $\triangle ABC$
I es el incentro del $\triangle ABC$
I es el ortocentro del $\triangle E_1E_2E_3$

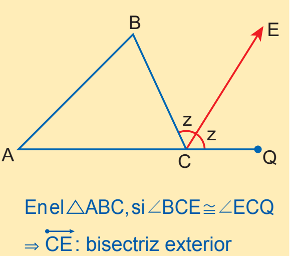
**Recuerda**

**1. Bisectriz interior:**




En el $\triangle BAC$ si $\angle BAP \cong \angle PAC$
⇒ $\overline{AP}$: bisectriz interior

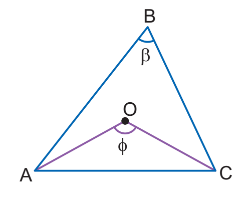
**2. Bisectriz exterior:**




En el $\triangle ABC$, si $\angle BCE \cong \angle ECQ$
⇒ $\overleftrightarrow{CE}$: bisectriz exterior

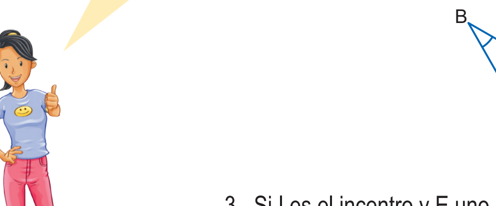
## Propiedades

1. Si O es circuncentro del $\triangle ABC$:



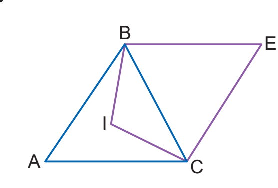

⇒ $\phi = 2\beta \ \wedge \ AO = OC$

2. Si O es circuncentro del $\triangle ABC$ (obtuso en A):




⇒ $\phi = 2\beta \ \wedge \ AO = OC$

3. Si I es el incentro y E uno de los excentros del $\triangle ABC$:

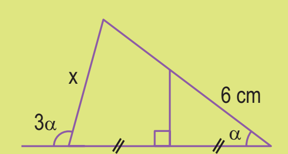


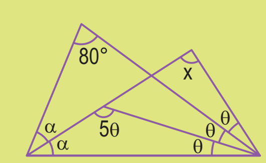

⇒ El cuadrilátero BECI es inscriptible.

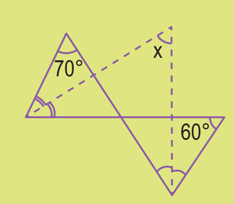
## EFECTUAR

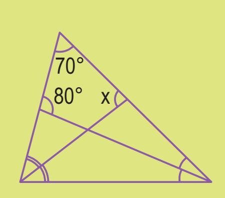


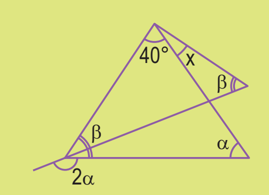
Halla x en los siguientes problemas:

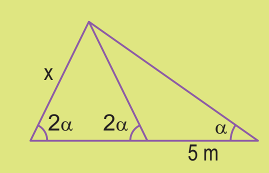
1.


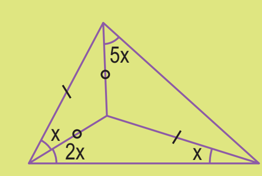

2.


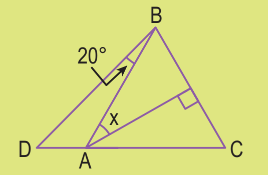

3.



4.



5.



6.


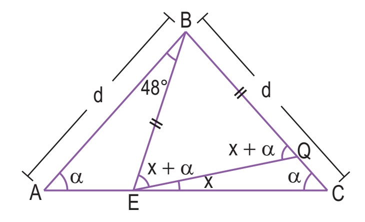

7.



8. AB = BC = AC


# Problemas resueltos

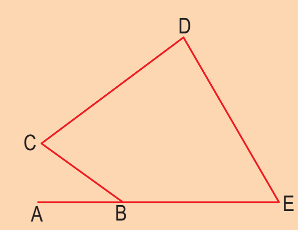
**1** En un triángulo ABC, (AB = BC), se traza la ceviana interior BE. En el triángulo BEC, se traza la ceviana EQ, tal que BE = BQ. Si m∠ABE es 48°, halla la medida del ∠QEC.

**Resolución:**

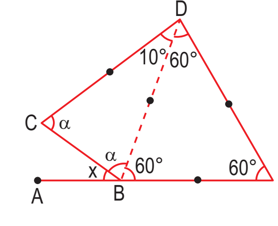



Nos piden: m∠QEC = x
El ∆ABC es isósceles: m∠A = m∠C = α
En el ∆EQC, por ángulo externo:
m∠EQB = m∠QEC + m∠C
m∠EQB = x + α
Luego, en el triángulo isósceles EBQ:
m∠BEQ = m∠EQB
Finalmente, usamos la propiedad del ángulo externo en el ∆ABE:
m∠BEC = m∠A + m∠ABE
$2x + \alpha = \alpha + 48° \Rightarrow 2x = 48°$
$\therefore x = 24°$

**2** En la figura adjunta, halla la medida del ángulo ABC, sabiendo que: m∠E = 60°, m∠D = 70° y DC = DE = BE.




**Resolución:**

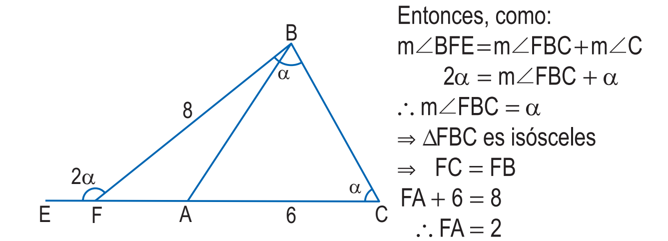



Piden: m∠ABC = x
Trazamos $\overline{DB}$.
Como BE = DE y m∠E = 60°:
⇒ El ∆BED es equilátero.

Entonces:
BD = DE y m∠BDE = m∠DBE = 60°
Luego:
m∠BDC = 70° – 60° ⇒ m∠BDC = 10°
El ∆CDB es isósceles, entonces:
m∠C = m∠CBD = α
$\alpha + \alpha + 10° = 180° \Rightarrow \alpha = 85°$
Finalmente, en B:
$x + \alpha + 60° = 180° \Rightarrow x + 85° + 60° = 180°$
$\therefore x = 35°$

**3** En un triángulo ABC se traza la ceviana exterior BF. Calcula la longitud de $\overline{AF}$ si BF = 8, AC = 6 y el suplemento del ∠BFC es el doble del ángulo C (F en la prolongación de $\overline{CA}$).

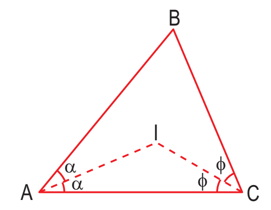
**Resolución:**
Nos piden: AF
Considerando el gráfico adjunto:
m∠BFE es suplemento de m∠BFC.
m∠BFE = 2m∠C = 2α




Entonces, como:
m∠BFE = m∠FBC + m∠C
2α = m∠FBC + α
∴ m∠FBC = α
⇒ ∆FBC es isósceles
⇒ FC = FB
FA + 6 = 8
∴ FA = 2

**4** Demuestra que, en todo triángulo, el mayor ángulo que forman las bisectrices de dos ángulos interiores mide 90° más la mitad de la medida del tercer ángulo.

**Resolución:**
Sea el triángulo ABC.




Demostraremos que:
$m\angle AIC = 90° + \frac{m\angle B}{2}$

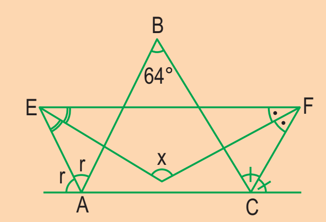
Tenemos, en el cuadrilátero no convexo ABCI:
$m\angle AIC = \alpha + m\angle B + \phi$ ...(1)

En el ∆AIC:
$\alpha + m\angle AIC + \phi = 180°$ ...(2)

Sumando miembro a miembro las expresiones (1) y (2):
$2m\angle AIC + \alpha + \phi = \alpha + m\angle B + \phi + 180°$

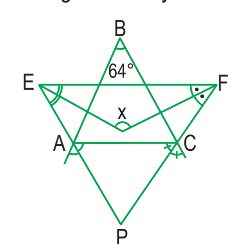
Cancelando $(\alpha + \phi)$:
$2m\angle AIC = 180° + m\angle B$
De donde: $m\angle AIC = 90° + \frac{m\angle B}{2}$

**5** Del gráfico, halla x.



**Resolución:**

Prolongamos $\overline{EA}$ y $\overline{FC}$ hasta P.




Por propiedad, en el △ABC:

$\Rightarrow m\angle P = 90° - \dfrac{m\angle B}{2}$

$m\angle P = 90° - \dfrac{64°}{2}$

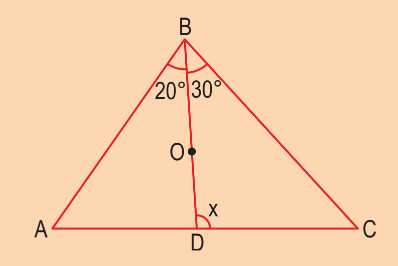
$\therefore m\angle P = 58°$

De otro lado, en el ΔEPF: $x = 90° + \dfrac{m\angle P}{2}$

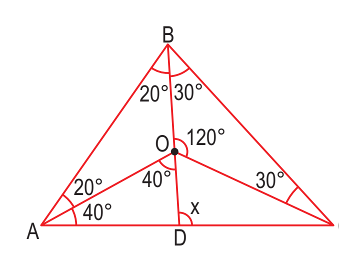
$x = 90° + \dfrac{58°}{2}$

$\therefore x = 119°$

**6** En el ΔABC, O es circuncentro, calcula x.




**Resolución:**




Piden: x

Como O es circuncentro:

$OA = OB = OC$

El Δ BOC es isósceles:

$m\angle OCB = 30°$ y

$m\angle BOC = 120°$

Por propiedad de este punto notable:

(O: centro de la circunferencia circunscrita)

$m\overset{\frown}{BC} = m\angle BOC = 2m\angle A$

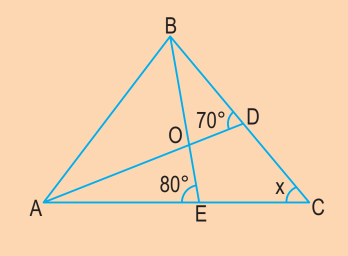
$120° = 2m\angle A \Rightarrow m\angle A = 60°$

Finalmente en el ΔABD:

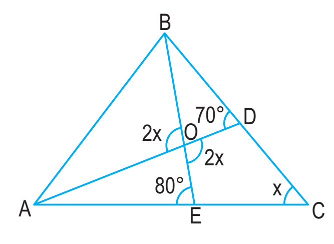
$x = m\angle A + 20°$

$\therefore x = 60° + 20° = 80°$

**7** En el ΔABC, O: circuncentro, calcula x.




**Resolución:**




Piden: x

Como O es circuncentro, sabemos por propiedad:

$m\angle AOB = 2m\angle C$

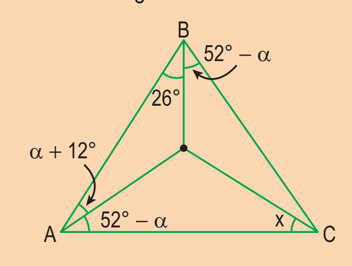
$m\angle AOB = 2x$

En el cuadrilátero ODCE se cumple:

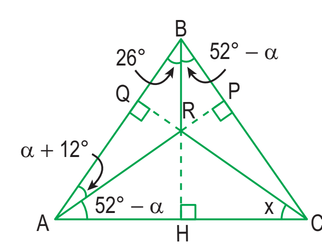
$2x + x = 80° + 70°$

$3x = 150° \Rightarrow x = 50°$

**8** Calcula el valor de x en la figura:




**Resolución:**




Prolongamos $\overline{BR}$ y $\overline{AR}$, notamos que: $\overline{AP} \perp \overline{BC}$ y $\overline{BH} \perp \overline{AC}$

Luego:

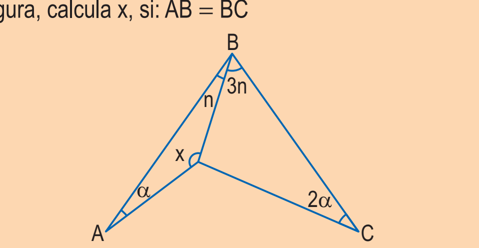
R: ortocentro del ΔABC

Por lo que, en el ⊿AQC:

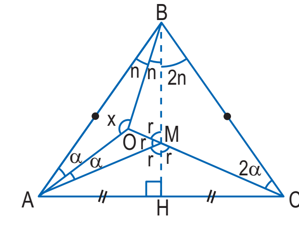
$x + \alpha + 12° + 52° - \alpha = 90°$

$\therefore x = 26°$

**9** En la figura, calcula x, si: AB = BC




**Resolución:**




El ΔABC es isósceles (AM = MC).

O: incentro del ΔAMB

$3r = 180°$

$r = 60°$

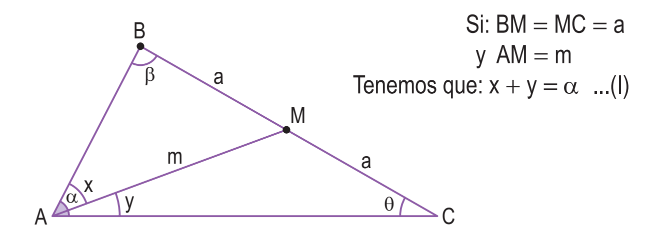
$x = 90° + r$

$x = 90° + 60°$

$\therefore x = 150°$

**10** En un triángulo ABC, se traza la mediana AM, tal que BC < 2AM. Calcula el máximo valor entero de m∠CAB

**Resolución:**
Graficamos el △ ABC:




Si: BM = MC = a
y AM = m
Tenemos que: $x + y = \alpha$ ...(I)

Dato: BC < 2AM
del dato: $2a < 2m \Rightarrow a < m$

Por el teorema de correspondencia: $x < \beta \wedge y < \theta$

Sumamos ambas desigualdades: $x + y < \theta + \beta$ ...(II)

Sabemos: $\alpha + \beta + \theta = 180°$

$\beta + \theta = 180° - \alpha$ ...(III)

Reemplazamos (III) y (I) en (II):

$\alpha < 180° - \alpha$

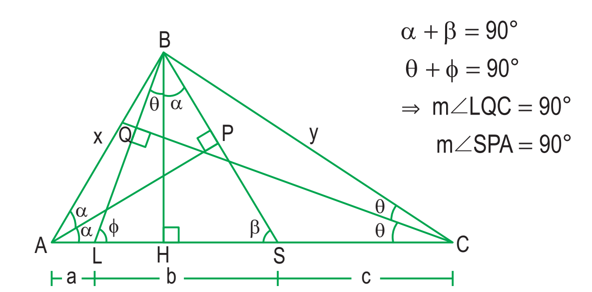
$2\alpha < 180°$

$\alpha < 90°$

$\therefore \alpha_{máx.} = 89°$

**11** En un triángulo ABC se traza la altura BH (H ∈ $\overline{AC}$) y las cevianas interiores BL y BS, tal que L ∈ $\overline{AH}$ y S ∈ $\overline{HC}$, AL = a, LS = b, CS = c, m∠BAC = 2m∠HBS y m∠ACB = 2m∠HBL. Calcula (AB + BC).

**Resolución:**
Graficamos el △ ABC:




$\alpha + \beta = 90°$

$\theta + \phi = 90°$

$\Rightarrow$ m∠LQC = 90°

m∠SPA = 90°

Trazamos las bisectrices AP y CQ y hallamos que los ángulos ∠LQC y ∠SPA son rectos; luego vemos en el gráfico que:

∠LBC = $\phi$ y ∠SBA = $\beta$

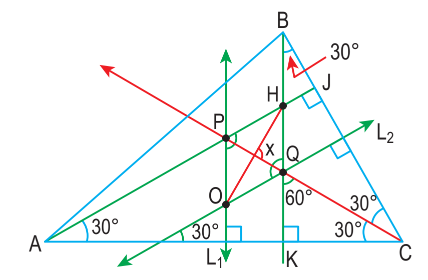
⇒ △ ABS y △LBC son triángulos isósceles

$$\Rightarrow \begin{cases} x = a + b \\ y = b + c \end{cases}$$

$\therefore x + y = a + 2b + c$

**12** En un triángulo acutángulo se pide lo siguiente: demuestra que la recta de Euler es perpendicular a la bisectriz de un ángulo interno que mide 60°.

**Resolución:**
Graficamos el triángulo ABC.




Del gráfico $\overleftrightarrow{L_1}$ y $\overleftrightarrow{L_2}$ son mediatrices y $\overline{BK}$ y $\overline{AJ}$ son alturas. Además:
$\overleftrightarrow{L_1} // \overline{BK}$ y $\overleftrightarrow{L_2} // \overline{AJ}$

Los ángulos ∠OPC y ∠HPQ son iguales y miden 60°

También: m∠HQP = m∠OQP = 60°

⇒ m∠PHQ = m∠POQ = 60°

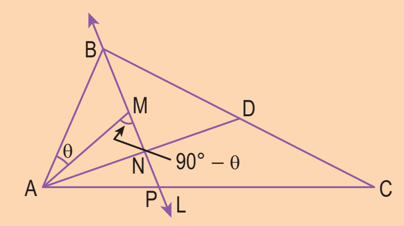
Luego, △PHQ y △POQ son equiláteros y

PH = HQ = QO = OP = PQ

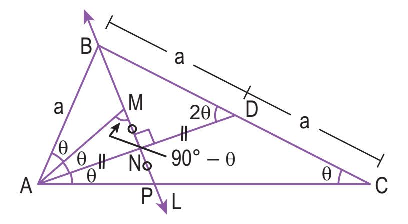
el rombo OPHQ tiene como diagonales a $\overline{PQ}$ y $\overline{MO}$. Por propiedad, las diagonales de un rombo son perpendiculares.

∴ x = 90°

**13** La recta L es mediatriz del segmento AD; además AB = DC y MN = NP. Halla la medida del ángulo θ.




**Resolución:**




Se observa que $\overline{NA}$ es parte de la mediatriz de $\overline{MP}$.

Luego: m∠MAN = m∠NAP = θ

Por ángulo externo: m∠BCA = θ

⇒ ΔADC es isósceles y AD = a

∴ ΔABD es equilátero.

$\Rightarrow 2\theta = 60°$

$\theta = 30°$

# TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS NOTABLES



**Observación**

Siempre es recomendable trazar la altura relativa a la hipotenusa en un triángulo rectángulo, para así obtener dos triángulos semejantes al primero.

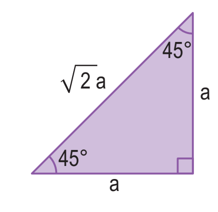
## DEFINICIÓN

Un triángulo rectángulo notable es un triángulo cuyos lados guardan una proporción conocida a partir de la medida de al menos uno de sus ángulos agudos. Además se clasifican en:

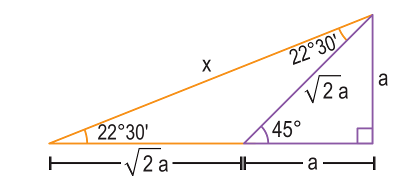
### A) Triángulos rectángulos notables exactos

Son aquellos triángulos que poseen ángulos internos de valor exacto o decimal exacto; y son:

**a) Triángulo de 45°**



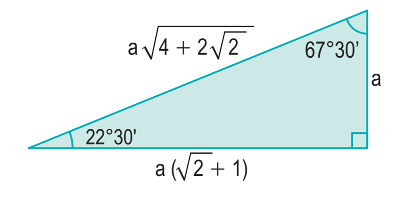

Este triángulo origina al triángulo notable exacto de 22°30'.



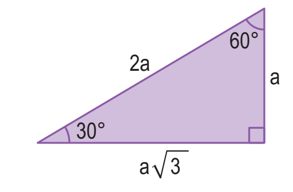

Usamos el teorema de Pitágoras:

$x^2 = a^2 + (\sqrt{2}\,a + a)^2$

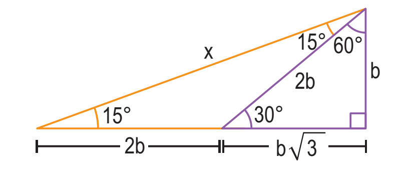
$x = \sqrt{4 + 2\sqrt{2}}\ a$




**b) Triángulo de 30° y 60°**




Este triángulo origina al triángulo notable de 15° y 75°.

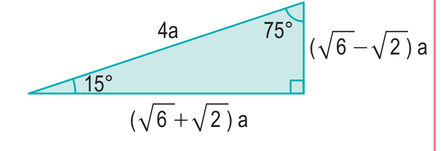



Usamos el teorema de Pitágoras:

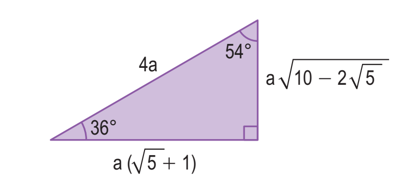
$x^2 = b^2 + (2b + b\sqrt{3})^2$

$x = b(\sqrt{6} + \sqrt{2})$

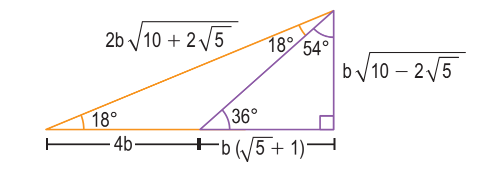
Si $b = (\sqrt{6} - \sqrt{2})a$, tenemos:




**c) Triángulo de 36° y 54°**

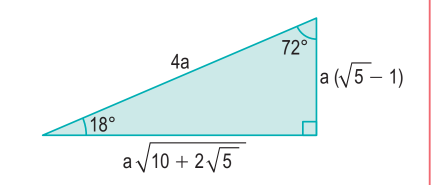



Este triángulo origina al triángulo notable de 18° y 72°.




Si igualamos:

$b\sqrt{10 + 2\sqrt{5}} = a(\sqrt{5} - 1)$, tenemos:




**Recuerda**

Si:

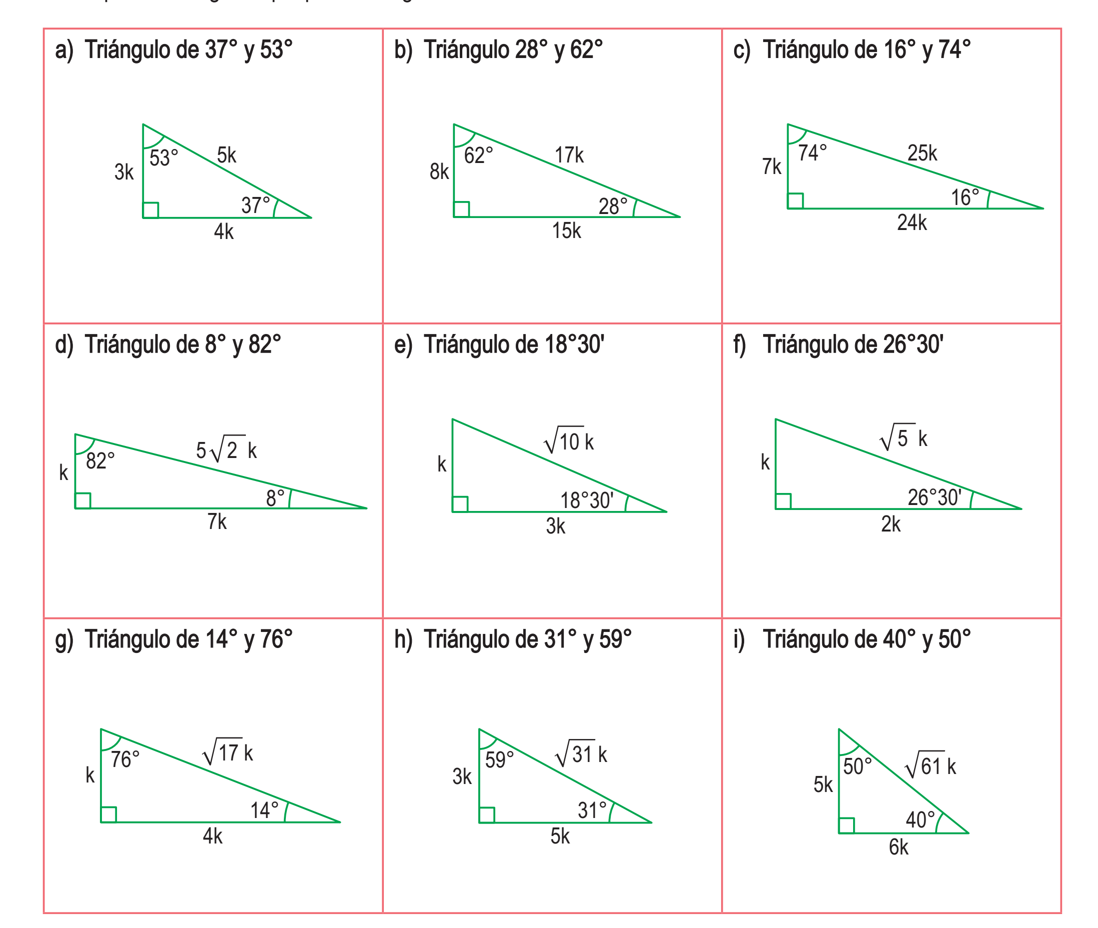
B, A, H, C, 75°, 15°

Entonces:

AC = 4BH

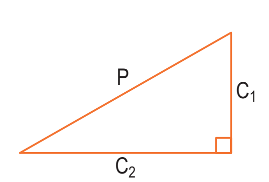
## B) Triángulos rectángulos notables aproximados

Son aquellos triángulos que poseen ángulos internos de valor inexacto o irracional.




## C) Triángulos pitagóricos

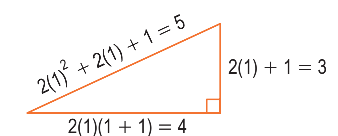
Son aquellos triángulos rectángulos que tienen lados de valor entero ($\mathbb{Z}^+$) y se pueden construir empleando las siguientes fórmulas:




| | Fórmula 1 | Fórmula 2 |
|---|---|---|
| Cateto menor ($C_1$) | $2n + 1$ | $2(n + 1)$ |
| Cateto mayor ($C_2$) | $2n(n + 1)$ | $n(n + 2)$ |
| Hipotenusa (P) | $2n^2 + 2n + 1$ | $n^2 + 2n + 2$ |

Si reemplazamos n por números enteros positivos y utilizamos la **fórmula 1** tendremos:

a) Para n = 1



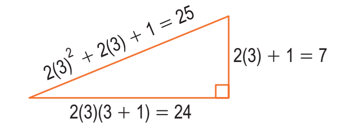

b) Para n = 2

$2(2)^2 + 2(2) + 1 = 13$

$2(2) + 1 = 5$

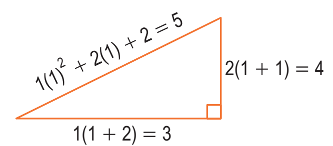
$2(2)(2 + 1) = 12$

c) Para n = 3

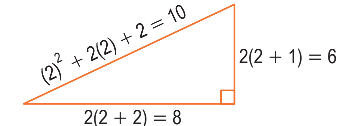



Ahora reemplazamos n por números enteros positivos y utilizamos la **fórmula 2**:

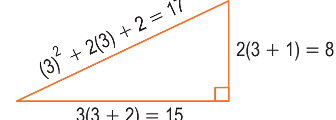
a) Para n = 1




b) Para n = 2




c) Para n = 3

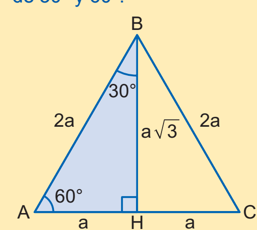





**Observación**

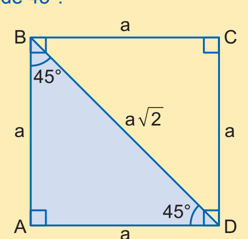
Los triángulos rectángulos notables exactos; se originan a partir de los polígonos regulares.

I. Triángulo rectángulo notable de 30° y 60°:



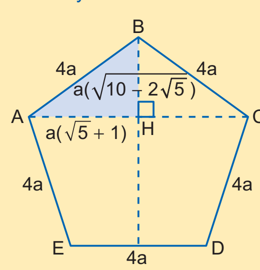

El triángulo equilátero ABC origina al triángulo rectángulo notable AHB.

II. Triángulo rectángulo notable de 45°:



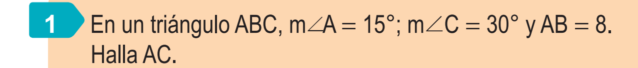

El cuadrado ABCD origina al triángulo rectángulo notable BAD.

III. Triángulo rectángulo notable de 36° y 54°:



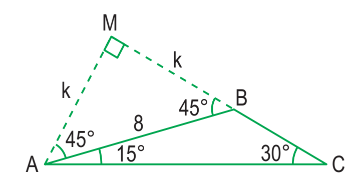

El pentágono regular ABCDE origina al triángulo rectángulo notable AHB.

# Problemas resueltos



**1** En un triángulo ABC, $m\angle A = 15°$; $m\angle C = 30°$ y $AB = 8$. Halla AC.

**Resolución:**




Prolongamos $\overline{CB}$, luego la medida del ángulo exterior que se forma es:

$30° + 15° = 45°$

Entonces, construimos un triángulo notable de 45°, trazando la altura exterior AM.

En el ⊿AMB: $8 = k\sqrt{2}$

$k = 4\sqrt{2}$

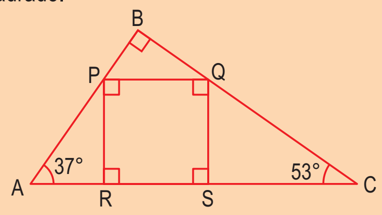
$\Rightarrow AM = MB = 4\sqrt{2}$

En el ⊿AMC: $AM = \dfrac{AC}{2}$

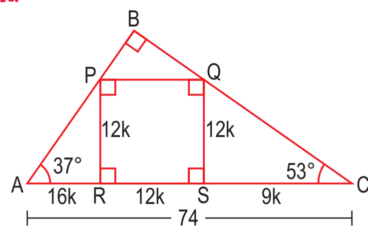
$2(4\sqrt{2}) = AC$

$\therefore\ AC = 8\sqrt{2}$

**2** En el triángulo ABC; AC = 74 cm y PQRS es un cuadrado. Halla el lado del cuadrado.




**Resolución:**

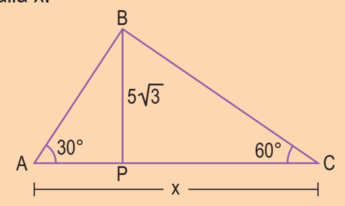



Del grafico:

$16k + 12k + 9k = 74$

$k = 2 \qquad \therefore\ PQ = 12\,.\,(2) = 24$ cm

**3** Del gráfico, halla x.




**Resolución:**

De la figura:

$AP = 5\sqrt{3}\,.\,(\sqrt{3}) = 15$

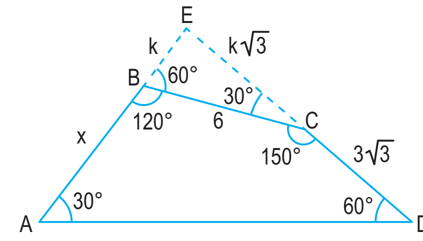
$PC = 5$

$AC = AP + PC$

$AC = 20$

**4** En un trapezoide ABCD, $m\angle A = 30°$, $m\angle B = 120°$, $m\angle C = 150°$, además $BC = 6$ y $CD = 3\sqrt{3}$. Calcula AB.

**Resolución:**




Prolongamos $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ intersecándose perpendicularmente en el punto E.

El ⊿BEC es notable de 30° y 60°, entonces:

$2k = 6$

$k = 3 \Rightarrow BE = 3 \wedge EC = 3\sqrt{3}$

En el ⊿AED: $ED = EC + CD$

$ED = 3\sqrt{3} + 3\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$

$\Rightarrow AE = (6\sqrt{3})\sqrt{3} = 18$

Finalmente:

$AE = AB + BE$

$18 = x + 3$

$\therefore\ x = 15$

**5** Se tiene un triángulo ABC recto en B donde $m\angle BAC = 60°$. Se traza su bisectriz interior AD. Calcula DC, si $BD = 2$.

**Resolución:**

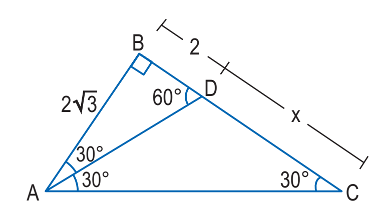
Nos piden $DC = x$

$\overline{AD}$: bisectriz del ángulo A

$\Rightarrow m\angle BAD = m\angle DAC = 30°$

En el $\Delta ABD$: $m\angle ADB = 60°$

En el gráfico:




El ⊿ABD es notable (30° y 60°).

Donde:

$BD = 2 \Rightarrow AB = 2\sqrt{3}$

El ⊿ABC es notable (30° y 60°)

Donde:

$AB = 2\sqrt{3}$ (opuesto a 30°)

$\Rightarrow BC = 2\sqrt{3}\left(\sqrt{3}\right) = 6$

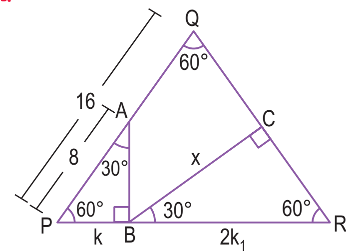
Conociendo:

$BC = BD + DC$

$6 = 2 + x \Rightarrow x = 4$

**6** Si PQR es un triángulo equilátero de lado 16. Por A, punto medio de $\overline{PQ}$, se traza $\overline{AB}$ perpendicular a $\overline{PR}$; por B se traza $\overline{BC}$ perpendicular a $\overline{QR}$. ¿Cuánto mide $\overline{BC}$?

**Resolución:**



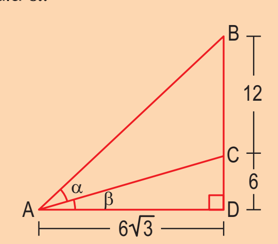

⊿PBA: triángulo notable 30° y 60°, donde 2k = 8
⊿BCR: triángulo notable 30° y 60°, x se opone a 60°

En el ⊿PBA:
$2k = 8 \Rightarrow k = 4$
$PB = k = 4$

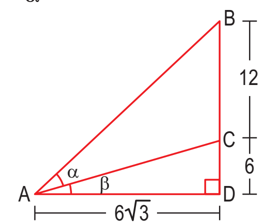
Por dato:
El $\Delta$PQR es equilátero
$\Rightarrow PQ = QR = RP = 16$
Como: $PR = PB + BR$
$16 = 4 + BR$
$BR = 12$

En el ⊿BCR:
$BR = 12 = 2k_1 \Rightarrow k_1 = 6$
Del análisis:
x se opone a 60°
$\Rightarrow x = k_1\sqrt{3}$
$\therefore x = 6\sqrt{3}$

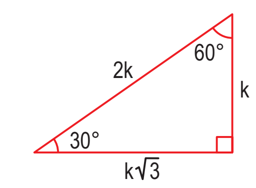
**7** De la figura, calcula $\alpha$.




**Resolución:**
Se pide: $m\angle BAC = \alpha$




⊿ADB: $m\angle DAB = \alpha + \beta$
⊿ADC: $m\angle DAC = \beta$
Recuerda, el triángulo rectángulo notable de 30° y 60°.

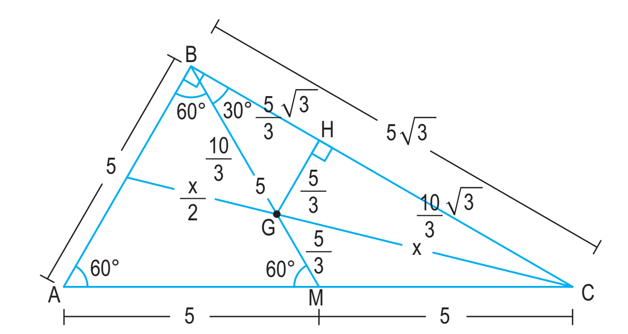



El ⊿ACD es notable: $\dfrac{6}{6\sqrt{3}} = \dfrac{k}{k\sqrt{3}}$

Luego: $\beta = 30° = m\angle DAC$ ...(I)
En el ⊿ADB:
$m\angle DAB = 60°$ ...(II)
Entonces:
$m\angle DAB = \alpha + \beta$
$60° = \alpha + 30°$
$\Rightarrow \alpha = 30°$

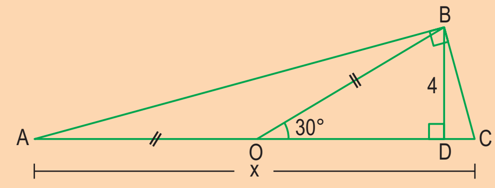
**8** Si la mediana relativa a la hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 5 y forma un ángulo de 30° con el cateto mayor, entonces la distancia del baricentro al vértice opuesto al cateto menor es:

**Resolución:**
Trazamos la altura GH, relativa al cateto mayor.




Sabemos por propiedad del baricentro BG = 2GM:
$\Rightarrow$ BG = 10/3 $\wedge$ GM = $\dfrac{5}{3}$
El ⊿BHG es notable de 30° y 60°.
$\Rightarrow$ GH = 5/3 y BH = $(5/3)\sqrt{3}$
El ⊿ABC es notable de 30° y 60°, se tiene: $BC = 5\sqrt{3}$
$\Rightarrow HC = BC - BH$
$HC = 5\sqrt{3} - \left(\dfrac{5}{3}\right)\sqrt{3}$
$HC = \dfrac{10}{3}\sqrt{3}$
Aplicamos el teorema de Pitágoras en el triángulo GHC:
$x^2 = \left(\dfrac{5}{3}\right)^2 + \left(\dfrac{10}{3}\right)^2 \sqrt{3}^2 \Rightarrow x = \dfrac{5}{3}\sqrt{13}$

**9** Halla x:

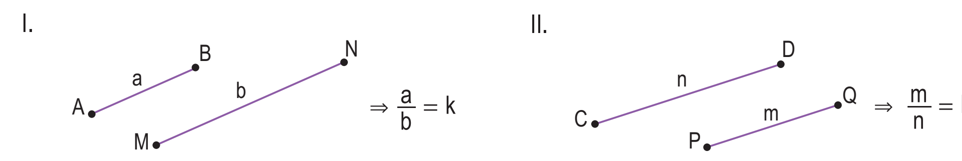



**Resolución:**
El $\Delta$AOB es isósceles $\Rightarrow$ $m\angle BAC = m\angle ABO = 15°$
Luego, el ⊿ABC es notable de 15° y 75°.
Por propiedad: $AC = 4(BD)$
$AC = x = 4(4)$
$\therefore x = 16$

# PROPORCIONALIDAD Y SEMEJANZA

## PROPORCIÓN GEOMÉTRICA

Una proporción geométrica es la igualdad de dos o más razones geométricas; es decir, dos magnitudes geométricas son proporcionales a otras dos magnitudes geométricas si sus razones geométricas son las mismas.

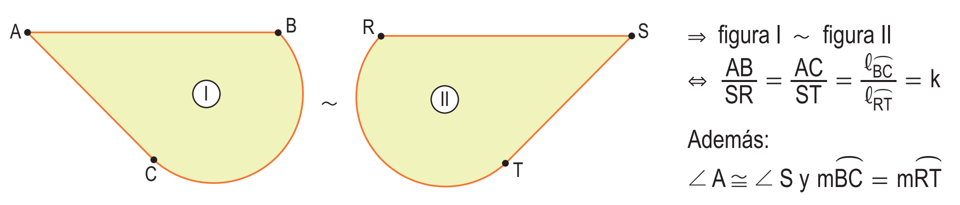



I. $\Rightarrow \frac{a}{b} = k$ II. $\Rightarrow \frac{m}{n} = k$

De (I) y (II) tenemos: $\frac{a}{b} = \frac{m}{n} = k \Rightarrow$ decimos que dicha expresión es una proporción geométrica.

## SEMEJANZA DE FIGURAS

Dos figuras son semejantes si ambas tienen la misma forma; es decir, la razón geométrica entre sus magnitudes longitudinales es la misma y por lo tanto forman una proporción geométrica.




$\Rightarrow$ figura I $\sim$ figura II

$\Leftrightarrow \frac{AB}{SR} = \frac{AC}{ST} = \frac{\ell_{\widehat{BC}}}{\ell_{\widehat{RT}}} = k$

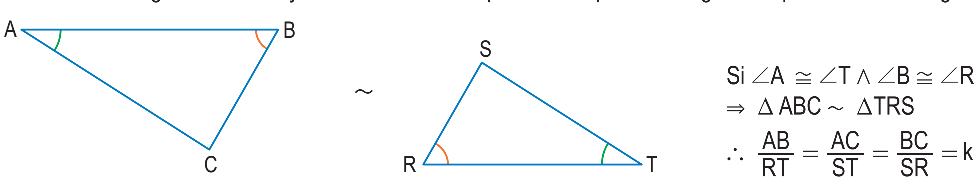
Además:

$\angle A \cong \angle S$ y $m\widehat{BC} = m\widehat{RT}$

## SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS

Dos triángulos son semejantes si y solo si ambos cumplen con uno de los siguientes casos:

**Caso I:** dos triángulos son semejantes cuando ambos poseen dos pares de ángulos respectivamente congruentes.

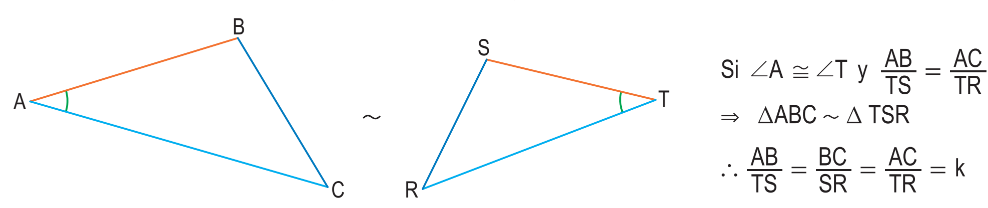



Si $\angle A \cong \angle T \wedge \angle B \cong \angle R$

$\Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta TRS$

$\therefore \frac{AB}{RT} = \frac{AC}{ST} = \frac{BC}{SR} = k$

**Caso II:** dos triángulos son semejantes cuando ambos poseen un par de ángulos congruentes y además los lados que comprenden a dicho ángulo en ambos triángulos son proporcionales.

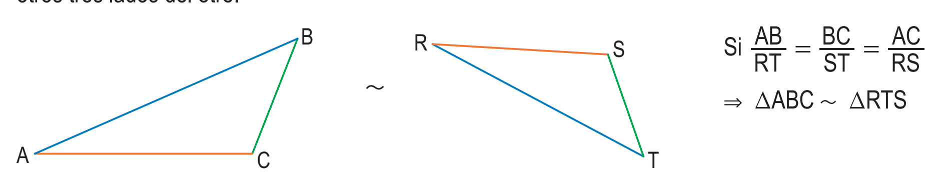



Si $\angle A \cong \angle T$ y $\frac{AB}{TS} = \frac{AC}{TR}$

$\Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta TSR$

$\therefore \frac{AB}{TS} = \frac{BC}{SR} = \frac{AC}{TR} = k$

**Caso III:** dos triángulos son semejantes cuando los tres lados de uno son respectivamente proporcionales a los otros tres lados del otro.




Si $\frac{AB}{RT} = \frac{BC}{ST} = \frac{AC}{RS}$

$\Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta RTS$

## CUATERNA ARMÓNICA

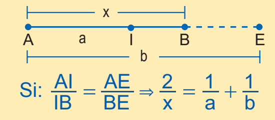
Una cuaterna armónica es una proporción geométrica que se origina cuando dos puntos dividen un segmento rectilíneo, uno interiormente y otro en su prolongación, en cuatro segmentos respectivamente proporcionales.

$\ell_1$ $\ell_2$ $\ell_3$ A I B E $\ell_4$ $\Rightarrow$ Si: $\frac{\ell_1}{\ell_2} = \frac{\ell_4}{\ell_3} \Rightarrow$ AI, IB, BE y AE conforman una cuaterna armónica.



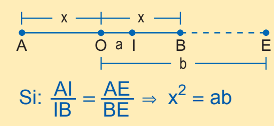

**Teoremas de cuaterna armónica**

I. Relación de Descartes:



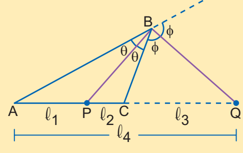

Si: $\frac{AI}{IB} = \frac{AE}{BE} \Rightarrow \frac{2}{x} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$

II. Relación de Newton:



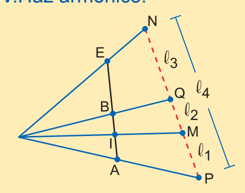

Si: $\frac{AI}{IB} = \frac{AE}{BE} \Rightarrow x^2 = ab$

III. Bisectrices armónicas:




Si: $\theta + \phi = 90° \Rightarrow \frac{\ell_1}{\ell_2} = \frac{\ell_4}{\ell_3}$

IV. Haz armónico:

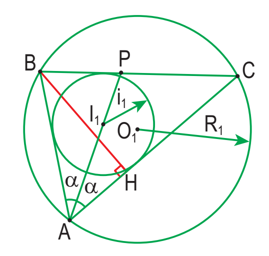


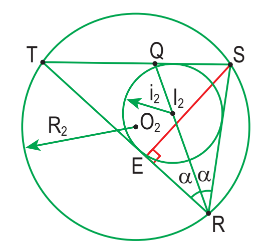

Si: $\frac{AI}{IB} = \frac{AE}{BE} \Rightarrow \frac{\ell_1}{\ell_2} = \frac{\ell_4}{\ell_3}$



## ELEMENTOS HOMÓLOGOS

Los elementos longitudinales de dos triángulos semejantes que se encuentran en una misma proporción y además cumplen una misma función en cada uno de sus triángulos, se denominan elementos homólogos.




$$\text{Si } \triangle ABC \sim \triangle RST \Rightarrow \frac{AB}{RS} = \frac{BC}{ST} = \frac{AC}{RT} = k$$

a) Lados homólogos: $\overline{AB}$ y $\overline{RS}$; $\overline{BC}$ y $\overline{ST}$; $\overline{AC}$ y $\overline{RT}$

b) Bisectrices homólogas: $\overline{AP}$ y $\overline{RQ}$

c) Alturas homólogas: $\overline{BH}$ y $\overline{SE}$

d) Inradios homólogos: $i_1$ e $i_2$

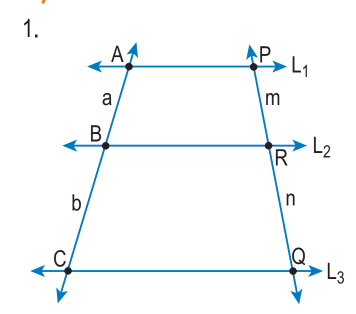
e) Circunradios homólogos: $R_1$ y $R_2$

$$\Rightarrow \frac{AB}{RS} = \frac{BH}{SE} = \frac{i_1}{i_2} = \frac{R_1}{R_2}$$

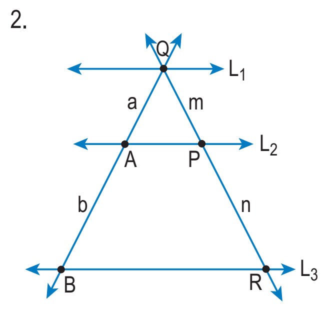
## TEOREMAS DE PROPORCIONALIDAD

### A) Teorema de Thales

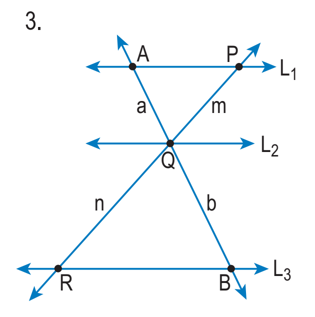
1.




2.

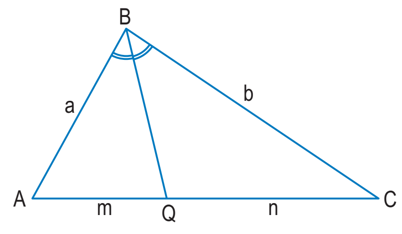



3.



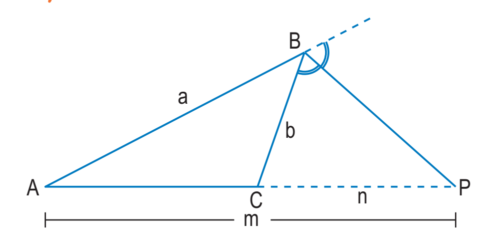

Si en los tres casos $\overleftrightarrow{L_1} \,//\, \overleftrightarrow{L_2} \,//\, \overleftrightarrow{L_3}$, entonces se cumple: $\frac{a}{b} = \frac{m}{n}$

### B) Teorema de la bisectriz interior



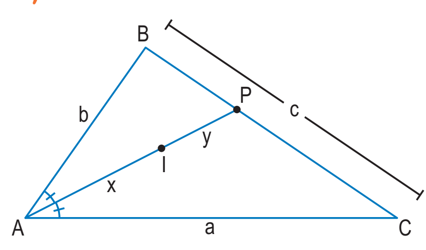

Si $\overline{BQ}$ es una bisectriz interior $\Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{m}{n}$

### C) Teorema de la bisectriz exterior



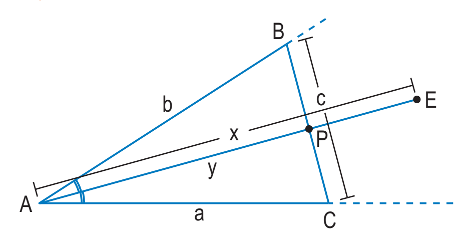

Si $\overline{BP}$ es una bisectriz exterior $\Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{m}{n}$

### D) Teorema del incentro




Si I es el incentro del $\triangle ABC \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{a+b}{c}$

### E) Teorema del excentro



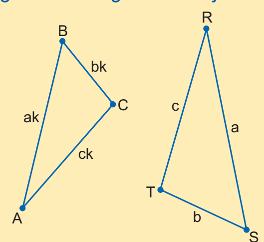

Si E es el excentro relativo a $\overline{BC} \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{a+b}{c}$



**Recuerda**

**Constante de proporcionalidad (k)**

Es un número real que nos indica la relación entre las magnitudes de los elementos homólogos de dos figuras semejantes.




Vemos que $\triangle ABC \sim \triangle RST$

$$\therefore \frac{AB}{RS} = \frac{BC}{TS} = \frac{AC}{RT} = k$$

- Si $k < 1 \Rightarrow$ el $\triangle ABC$ es de menor tamaño que el $\triangle RST$
- Si $k = 1 \Rightarrow$ el $\triangle ABC$ es de igual tamaño que el $\triangle RST$
- Si $k > 1 \Rightarrow$ el $\triangle ABC$ es de mayor tamaño que el $\triangle RST$

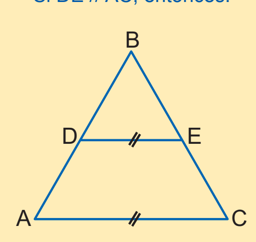


**Importante**

**Corolario de Thales**

Toda paralela a un lado de un triángulo que intercepta a los otros dos lados, lo divide en partes directamente proporcionales.

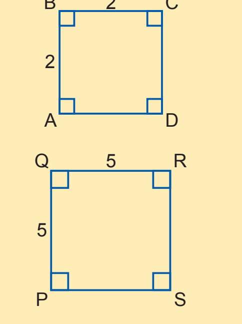
Si $\overline{DE} \,//\, \overline{AC}$, entonces:




- $\frac{BD}{DA} = \frac{BE}{EC}$
- $\frac{BD}{AB} = \frac{BE}{BC} = \frac{DE}{AC}$
- $\frac{DA}{BA} = \frac{EC}{BC}$

**Atención**

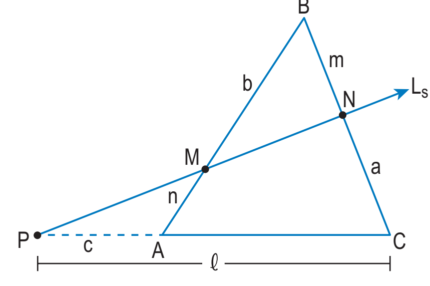
En general, dos figuras semejantes tienen igual forma y tamaños diferentes.
Ejemplo:




Los cuadrados ABCD y PQRS son semejantes.

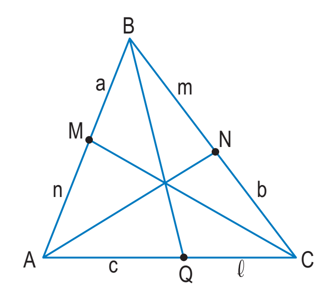


### F) Teorema de Menelao



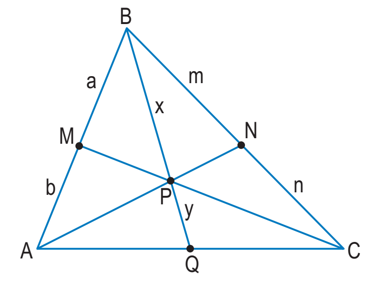

Si $\overleftrightarrow{L_S}$ es una recta transversal al $\triangle ABC$
$\Rightarrow abc = mn\ell$

### G) Teorema de Ceva



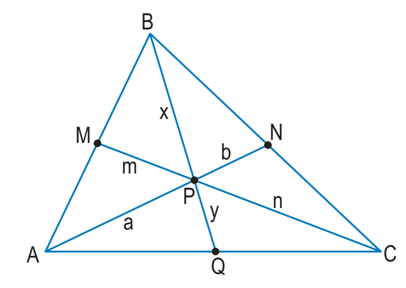

Si $\overline{AN}$; $\overline{BQ}$ y $\overline{CM}$ son cevianas internas concurrentes
$\Rightarrow abc = mn\ell$

### H) Teorema de Van Aubel




Si $\overline{AN}$; $\overline{BQ}$ y $\overline{CM}$ son cevianas concurrentes en P, se cumple: $\frac{x}{y} = \frac{a}{b} + \frac{m}{n}$

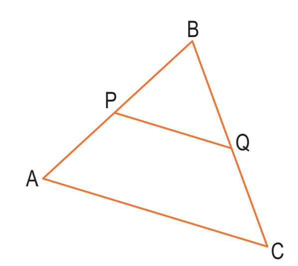
### I) Teorema de Gergonne




Si $\overline{AN}$; $\overline{BQ}$ y $\overline{CM}$ son cevianas concurrentes en P, se cumple: $\frac{y}{x} + \frac{b}{a} + \frac{m}{n} = 1$

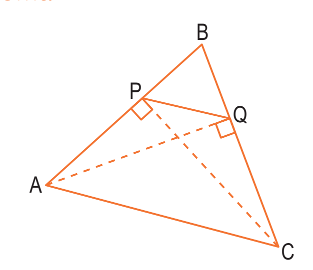
## TEOREMAS DE SEMEJANZA

### Teorema 1



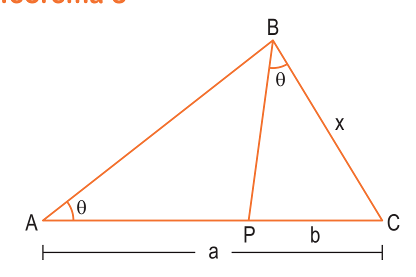

Si $\overline{PQ} \parallel \overline{AC} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle PBQ$

### Teorema 2



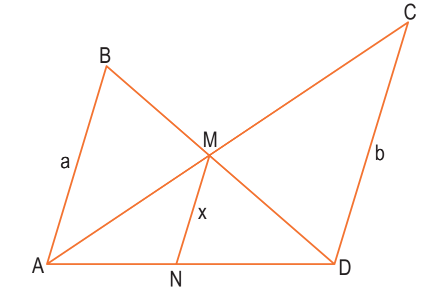

Si $\overline{AB} \perp \overline{PC} \wedge \overline{BC} \perp \overline{AQ} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle QBP$

### Teorema 3



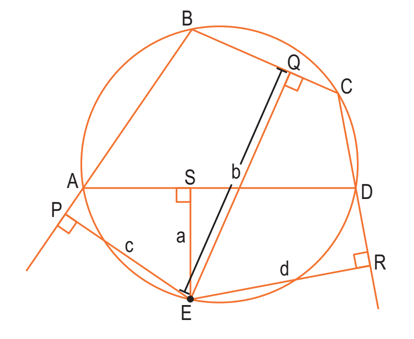

Si $m\angle BAC = m\angle CBP \Rightarrow x^2 = ab$

### Teorema 4



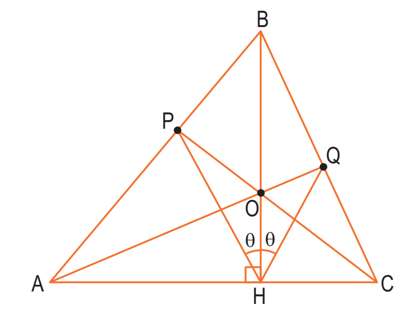

Si $\overline{AB} \parallel \overline{CD} \parallel \overline{MN} \Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$

### Teorema 5




Si ⏢ ABCD es inscriptible se cumple: $ab = cd$

### Teorema 6

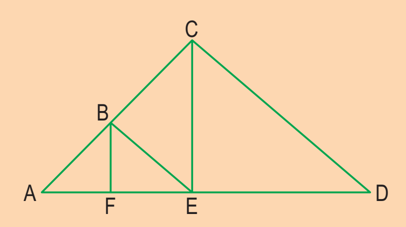



Si $\overline{BH} \perp \overline{AC}$ y $\overline{BH} \cap \overline{AQ} \cap \overline{CP} = \{O\}$
$\Rightarrow m\angle PHB = m\angle QHB$



# Problemas resueltos

**1** En la figura, $\overline{BE} \parallel \overline{CD}$ y $\overline{BF} \parallel \overline{CE}$. Si ED = 12AF y EF = 12. Calcula AD.

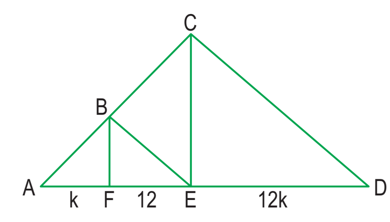



**Resolución:**

Se pide: AD

Por dato:

$\frac{AF}{ED} = \frac{1}{12} \Rightarrow AF = k \wedge ED = 12k$




Dado que $\overline{BF} \parallel \overline{CE} \Rightarrow \frac{m}{n} = \frac{k}{12}$ ...(1)

Luego, como: $\overline{BE} \parallel \overline{CD}$

$\Rightarrow \frac{m}{n} = \frac{k+12}{12k}$ ...(2)

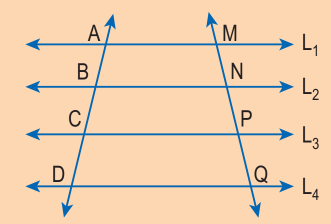
Igualando (1) y (2):

$\frac{k}{12} = \frac{k+12}{12k} \Rightarrow k = 4$

Nos piden: AD = 12 + 13k ⇒ AD = 64

**2** Según el gráfico mostrado 5AB = 3BC = 4CD, calcula:

$\left(\frac{MN}{NP}\right)^2 + \left(\frac{MN}{PQ}\right)^2$, si además: $\overleftrightarrow{L_1} \parallel \overleftrightarrow{L_2} \parallel \overleftrightarrow{L_3} \parallel \overleftrightarrow{L_4}$




**Resolución:**

Del dato: 5AB = 3BC = 4CD = 60k

Entonces:

AB = 12k; BC = 20k; CD = 15k

Luego, en el gráfico:

MN = 12p; NP = 20p; PQ = 15p

Nos piden:

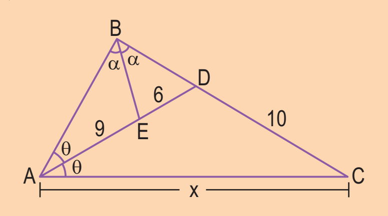
$\left(\frac{MN}{NP}\right)^2 + \left(\frac{MN}{PQ}\right)^2$

Reemplazando datos:

$\left(\frac{12p}{20p}\right)^2 + \left(\frac{12p}{15p}\right)^2$

$\therefore \left(\frac{MN}{NP}\right)^2 + \left(\frac{MN}{PQ}\right)^2 = \frac{9}{25} + \frac{16}{25} = 1$

**3** En el gráfico, calcula x.




**Resolución:**

En el △ABD, por el teorema de la bisectriz interior:

$\frac{AB}{BD} = \frac{9}{6} \Rightarrow \frac{AB}{BD} = \frac{3}{2}$ ...(1)

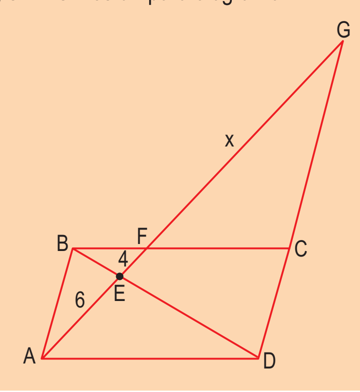
En el △ABC, por el teorema de la bisectriz interior:

$\frac{x}{10} = \frac{AB}{BD}$ ...(2)

Reemplazando (1) en (2):

$\frac{x}{10} = \frac{3}{2} \Rightarrow x = 15$

**4** Calcula x, si ABCD es un paralelogramo.




**Resolución:**

Del paralelogramo: $\overline{AB} \parallel \overline{DG} \wedge \overline{BF} \parallel \overline{AD}$

Como $\overline{AB} \parallel \overline{DG}$, por el corolario de Tales:

$\Rightarrow \frac{6}{4+x} = \frac{BE}{ED}$ ...(1)

Como $\overline{BF} \parallel \overline{AD}$, por el corolario de Tales:

$\Rightarrow \frac{BE}{ED} = \frac{4}{6}$ ...(2)

Igualando (1) y (2):

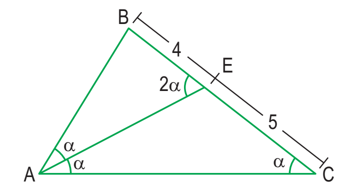
$\frac{6}{4+x} = \frac{4}{6} \Rightarrow 36 = 4(4+x)$

$9 = 4 + x$

$\therefore x = 5$

**5** En un ΔABC, m∠A = 2m∠C, se traza la bisectriz interior AE. Halla AB, si BE = 4 y EC = 5

**Resolución:**




Del dato:
m∠A = 2m∠C
Si: m∠C = α
⇒ m∠A = 2α

Luego:
m∠AEB = 2α (ángulo externo)
⇒ Δ ABE es semejante al ΔCBA:

$\frac{AB}{BC} = \frac{BE}{AB} \Rightarrow \frac{AB}{9} = \frac{4}{AB}$

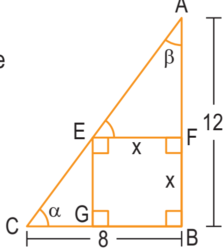
∴ AB = 6

**6** En un ΔABC, m∠B = 90°, de catetos AB = 12, BC = 8, se inscribe un cuadrado con uno de sus vértices en B y el opuesto sobre la hipotenusa. Halla la longitud del lado de dicho cuadrado.

**Resolución:**

Si BFEG, es un cuadrado y **x** la longitud de su lado.

Es fácil deducir que los triángulos AFE y ABC son semejantes.




Luego:

$\frac{EF}{CB} = \frac{AF}{AB} \Rightarrow \frac{x}{8} = \frac{12 - x}{12}$

Donde: x = 4,8

**7** En un triángulo acutángulo ABC, se trazan las alturas AQ y CH. Halla HQ, si: AC = 20, BH = 18 y BC = 25.

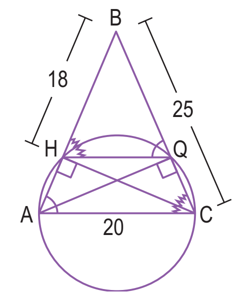
**Resolución:**

Piden: HQ

Del gráfico el ⏢AHQC es inscriptible.

Por lo tanto:
m∠HQB = m∠BAC

Luego:
ΔQBH ~ ΔABC

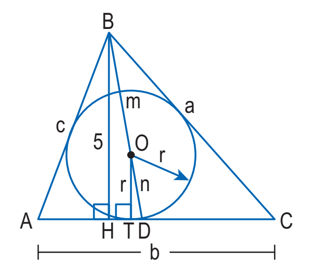



∴ $\frac{HQ}{AC} = \frac{HB}{CB} \Rightarrow \frac{HQ}{20} = \frac{18}{25}$

De donde: HQ = 14,4

**8** En los lados de un triángulo ABC se cumple que: AB + BC = 4(AC) y su altura BH mide 5. Halla la longitud del inradio de dicho triángulo.

**Resolución:**




Por dato: a + c = 4b ...(I)
Por el teorema del incentro:

$\frac{m}{n} = \frac{a + c}{b}$ ...(II)

De (I) y (II):

$\frac{m}{n} = \frac{4b}{b} \Rightarrow m = 4n$ ...(III)

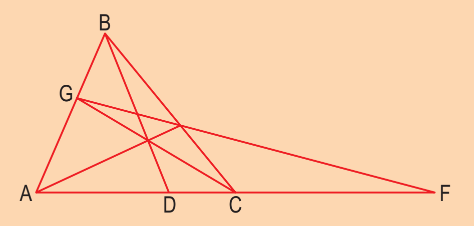
El ⊿BHD ~ ⊿OTD

$\frac{5}{r} = \frac{m + n}{n}$ ...(IV)

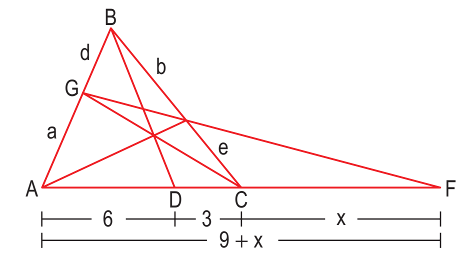
De (III) y (IV):

$\frac{5}{r} = \frac{4n + n}{n} = \frac{5n}{n} \Rightarrow r = \frac{5n}{5n}$ ∴ r = 1

**9** Si: AD = 6 y DC = 3, calcula la longitud de $\overline{CF}$.




**Resolución:**




Por el T. Menelao: abx = de(9 + x) ... (1)
Por el T. Ceva: ab3 = de6 ... (2)
Sumamos (1) y (2):

$\frac{x}{3} = \frac{9 + x}{6}$

x = 9

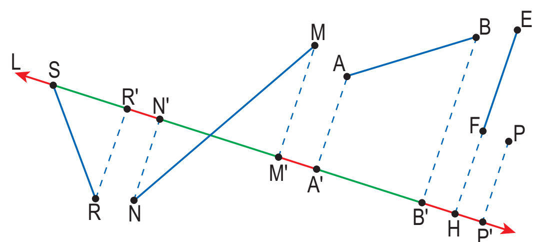
∴ CF = 9

# RELACIONES MÉTRICAS



## PROYECCIONES ORTOGONALES SOBRE UNA RECTA

La proyección ortogonal de un punto sobre una recta, vendría a ser el pie de la altura trazada desde dicho punto hasta una recta llamada "eje de proyección"; asimismo la proyección ortogonal de un segmento sería la parte del llamado "eje de proyección" que se encuentra comprendido entre las proyecciones ortogonales de los extremos de dicho segmento.




Notaciones:

- $P' = Proy_{\overleftrightarrow{L}} P$ : "Proyección de P sobre $\overleftrightarrow{L}$"
- $\overline{A'B'} = Proy_{\overleftrightarrow{L}} \overline{AB}$ : "Proyección de $\overline{AB}$ sobre $\overleftrightarrow{L}$"
- $H = Proy_{\overleftrightarrow{L}} \overline{EF}$ : "Proyección de $\overline{EF}$ sobre $\overleftrightarrow{L}$"
- $\overline{M'N'} = Proy_{\overleftrightarrow{L}} \overline{MN}$: "Proyección de $\overline{MN}$ sobre $\overleftrightarrow{L}$"
- $\overline{R'S} = Proy_{\overleftrightarrow{L}} \overline{RS}$: "Proyección de $\overline{RS}$ sobre $\overleftrightarrow{L}$"

**Nota**

**Proyectantes:**
Son aquellos segmentos que unen los puntos con sus proyecciones y son:

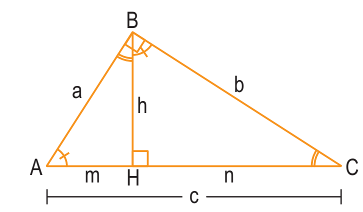
I. **Proyectantes ortogonales:**
Son aquellas proyectantes que son perpendiculares al eje de proyección.

II. **Proyectantes oblicuas:**
Son aquellas proyectantes que son oblicuas al eje de proyección.

III. **Proyectantes cónicas:**
Son aquellas que parten de un punto común denominado foco de proyección.

## RELACIONES MÉTRICAS EN EL TRIÁNGULO RECTÁNGULO

En un triángulo rectángulo, la altura relativa a su hipotenusa determina dos triángulos semejantes entre sí y también semejantes al triángulo rectángulo dado.




En el ⊿ABC tenemos:
$\overline{BH}$: altura relativa a la hipotenusa.
$\overline{AH} = Proy_{\overline{AC}} \overline{AB}$: proyección del cateto menor sobre la hipotenusa.
$\overline{HC} = Proy_{\overline{AC}} \overline{BC}$: proyección del cateto mayor sobre la hipotenusa.

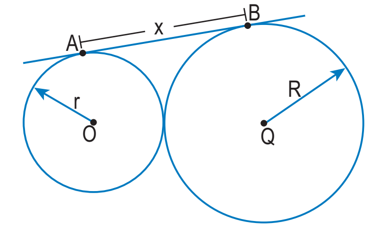


Dado que: ⊿ABC ~ ⊿AHB ~ ⊿BHC ⇒ se cumplen los siguientes teoremas:

| | | |
|---|---|---|
| • **Teorema 1**: $a^2 = cm$ | • **Teorema 2**: $b^2 = cn$ | • **Teorema 3**: $h^2 = mn$ |
| • **Teorema 4**: $ab = hc$ | • **Teorema 5**: $\frac{a^2}{b^2} = \frac{m}{n}$ | • **Teorema 6**: $\frac{1}{h^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$ |

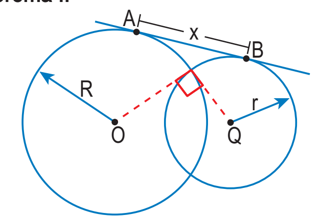
### Teoremas adicionales

**A) Teorema I**



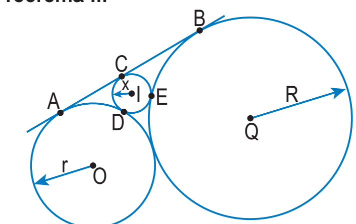

En dos circunferencias tangentes exteriores
Se cumple: $x = 2\sqrt{Rr}$

**B) Teorema II**




En dos circunferencias ortogonales
Se cumple: $x = \sqrt{2Rr}$

**C) Teorema III**

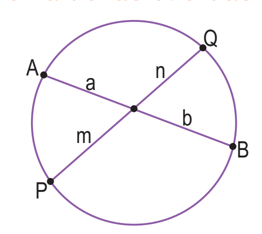



Se cumple: $\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{R}} + \frac{1}{\sqrt{r}}$

## RELACIONES MÉTRICAS EN LA CIRCUNFERENCIA

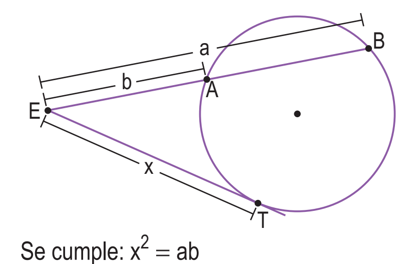
Las longitudes de los segmentos asociados a la circunferencia se relacionan mediante los siguientes teoremas:

### A) Teorema de las cuerdas



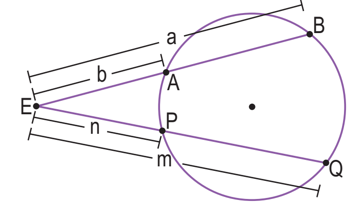

Se cumple: $ab = mn$

### B) Teorema de la tangente



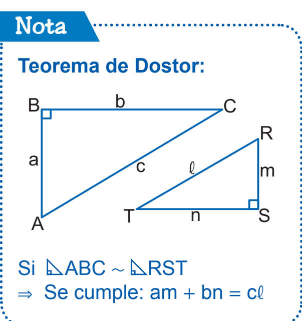

Se cumple: $x^2 = ab$

### C) Teorema de las secantes




Se cumple: $ab = mn$

**Teorema de Dostor:**

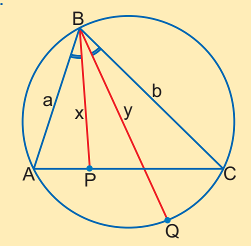



Si ◺ABC ~ ◺RST
⇒ Se cumple: $am + bn = c\ell$

## Recuerda

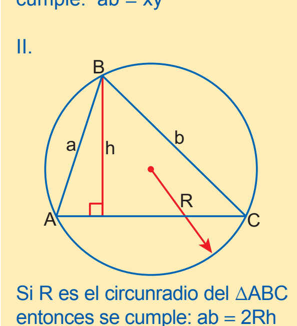
Teoremas de las isogonales:

I.




Si $\overline{BP}$ y $\overline{BQ}$ son segmentos isogonales entonces se cumple: $ab = xy$

II.

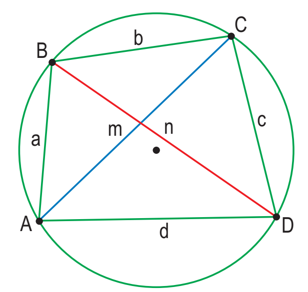



Si R es el circunradio del △ABC entonces se cumple: $ab = 2Rh$



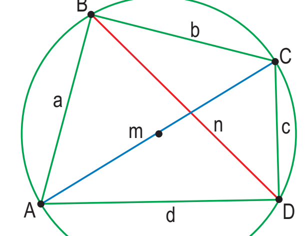
## Teoremas adicionales

### I. Teorema de Ptolomeo



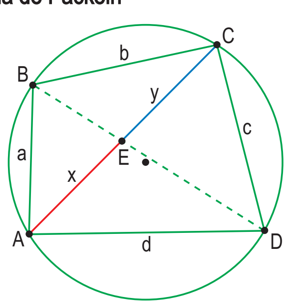

Se cumple: $mn = ac + bd$

### II. Teorema de Viette



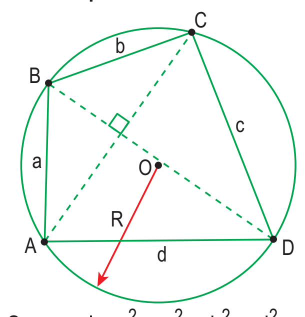

Se cumple: $\dfrac{m}{n} = \dfrac{ad + bc}{ab + dc}$

### III. Teorema de Packein




Se cumple: $\dfrac{x}{y} = \dfrac{ad}{bc}$

### IV. Teorema de Arquímedes



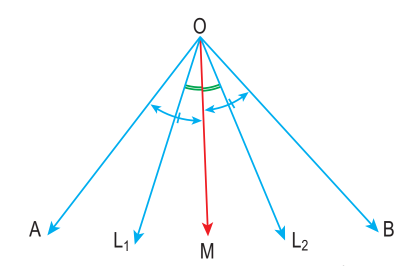

Se cumple: $a^2 + c^2 = b^2 + d^2 = 4R^2$

## RECTAS ISOGONALES

Se denomina así a aquel par de rectas que pasan por el vértice de un ángulo y además son simétricas con respecto a la bisectriz de dicho ángulo. Además dependiendo de su posición pueden ser:

### A) Isogonales interiores

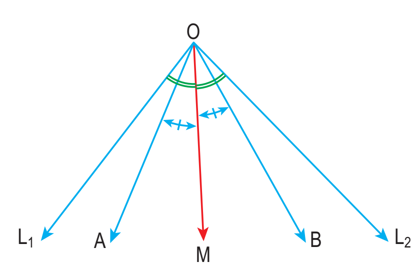
Cuando parte de las rectas isogonales se encuentran en la región interior del ángulo.




Si $\overleftrightarrow{L_1}$ y $\overleftrightarrow{L_2}$ son simétricos respecto de $\overrightarrow{OM}$
⇒ $\overleftrightarrow{L_1}$ y $\overleftrightarrow{L_2}$ son rectas isogonales interiores

### B) Isogonales exteriores

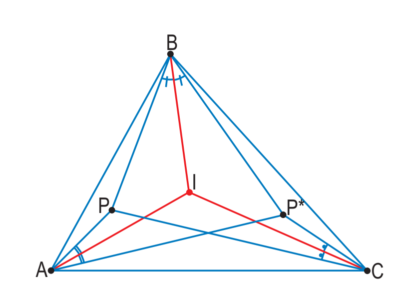
Cuando las rectas isogonales se encuentran en su totalidad en la región exterior del ángulo.




Si $\overleftrightarrow{L_1}$ y $\overleftrightarrow{L_2}$ son simétricos respecto de $\overrightarrow{OM}$
⇒ $\overleftrightarrow{L_1}$ y $\overleftrightarrow{L_2}$ son rectas isogonales exteriores

## Conjugado isogonal

Se dice que dos puntos en el interior de un triángulo son conjugados isogonales, si los segmentos que se originan uniendo al primer punto con cada uno de los vértices son respectivamente segmentos isogonales con los segmentos que se originan uniendo al segundo punto con cada uno de los vértices.




**Notación:**

P*: "Conjugado isogonal de P en el △ABC".

En donde I es el incentro del △ABC y además:

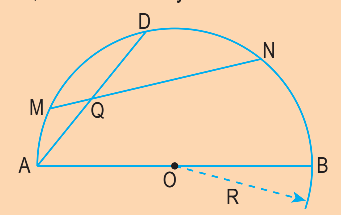
$\overline{AP}$ y $\overline{AP^*}$ son segmentos isogonales.

$\overline{BP}$ y $\overline{BP^*}$ son segmentos isogonales.

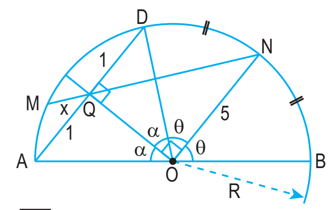
$\overline{CP}$ y $\overline{CP^*}$ son segmentos isogonales.

# Problemas resueltos

**1** En el gráfico, R = 5, AQ = QD = 1 y $m\overset{\frown}{DN} = m\overset{\frown}{NB}$. Calcula MQ.




**Resolución:**




Trazamos $\overline{DO}$ y $\overline{ON}$.

Por el teorema de las cuerdas: $x(QN) = 1 \times 1$

Además:

$2\alpha + 2\theta = 180°$

$\alpha + \theta = 90°$

En el ⊿AQO:

$QO^2 + 1^2 = 5^2$

$QO^2 = 24$

En el ⊿QON:

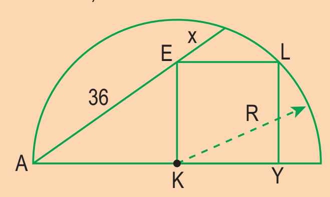
$QN^2 = QO^2 + 5^2$

$QN^2 = 49 \Rightarrow QN = 7$

Entonces: $x = \dfrac{1}{QN}$

$\therefore x = \dfrac{1}{7}$

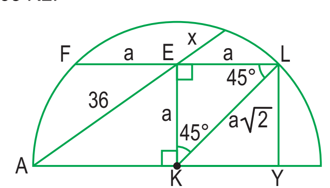
**2** Si KELY es un cuadrado, calcula x.




**Resolución:**

Prolongamos $\overline{LE}$, entonces: FE = EL

Luego, trazamos $\overline{KL}$:



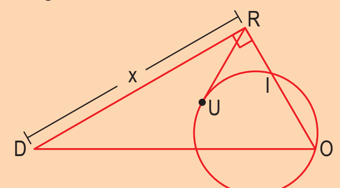

En el ⊿AKE: $36^2 = a^2 + (a\sqrt{2})^2$

$a = 12\sqrt{3}$

Teorema de las cuerdas: $36(x) = a(a)$

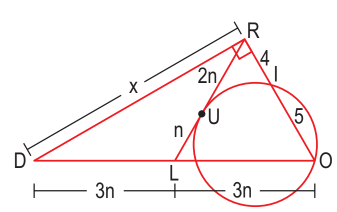
$36x = (12\sqrt{3})^2 \Rightarrow x = 12$

**3** Calcula x, si RI = 4 y IO = 5. U es punto de tangencia y, además, baricentro del triángulo DRO.




**Resolución:**

Prolongamos $\overline{RU}$:




Por el teorema de la tangente:

$(2n)^2 = 9(4)$

$2n = 6$

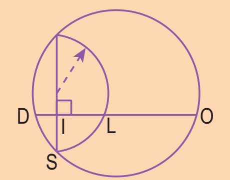
$n = 3$

$DO = 6n$

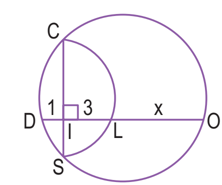
$\Rightarrow DO = 6(3) = 18$

$\therefore x = 9\sqrt{3}$

**4** En el gráfico, si DI = 1, IL = 3, calcula LO.




**Resolución:**




En la semicircunferencia:

$3^2 = (CI)(IS)$

$9 = (CI)(IS)$

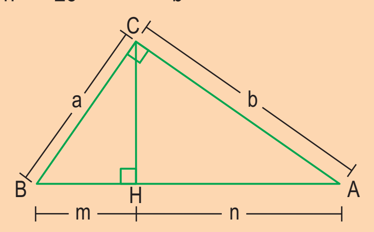
En la circunferencia aplicamos el teorema de las cuerdas:

$(DI)(IO) = (CI)(IS) \Rightarrow (1)(3 + x) = 9$

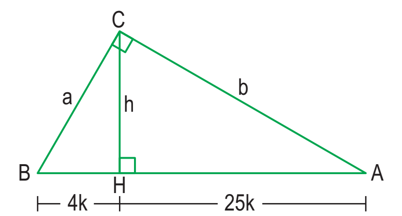
$3 + x = 9$

$x = 6$

**5** En la figura $\dfrac{m}{n} = \dfrac{4}{25}$, calcula $\dfrac{a}{b}$.




**Resolución:**




Piden: $\dfrac{a}{b}$

Sabemos por relaciones métricas que:

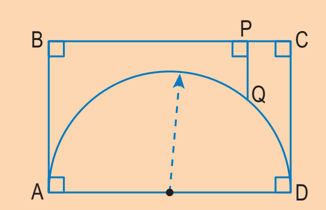
$a^2 = (29k)4k$ ...(1)

$b^2 = (29k)25k$ ...(2)

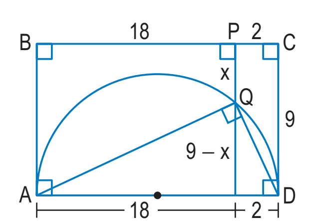
Dividiendo (1) entre (2):

$\left(\dfrac{a}{b}\right)^2 = \dfrac{4}{25} \Rightarrow \dfrac{a}{b} = \dfrac{2}{5}$

**6** En la figura calcula PQ, si BP = 18, PC = 2 y AB = 9.




**Resolución:**




En el ⊿AQD:

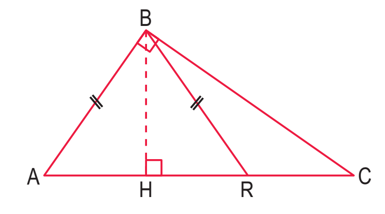
$(9 - x)^2 = 18(2)$

$9 - x = 6$

$x = 3$

**7** En un triángulo ABC, recto en B, se traza la ceviana interior BR, tal que AB = BR. Halla AB, si: (AC)(AR) = 72

**Resolución:**




Dato: (AC)(AR) = 72 ...(1)

Piden: AB

Se traza la altura BH. Luego, en el △ABR isósceles:

$AH = HR = \frac{AR}{2}$ ...(2)

En el ⊿ABC:

$AB^2 = (AC)(AH)$

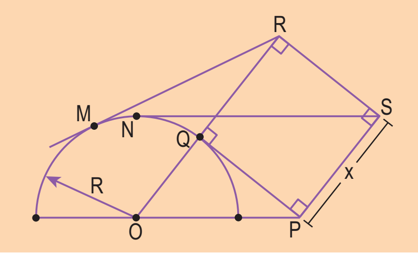
$AB^2 = (AC)\left(\frac{AR}{2}\right) \Rightarrow AB^2 = \frac{(AC)(AR)}{2}$

Luego:

$AB^2 = \frac{72}{2}$

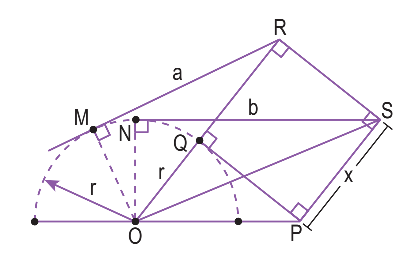
$\therefore AB = 6$

**8** Calcula x; si N; M y Q son puntos de tangencia; además MR = a y NS = b (PQRS es un cuadrado).




**Resolución:**

Trazamos: $\overline{OM} \perp \overline{MR}$ y $\overline{ON} \perp \overline{NS}$




En el ⊿ONS aplicamos el teorema de Pitágoras:

$(OS)^2 = (ON)^2 + (NS)^2 \Rightarrow (OS)^2 = r^2 + b^2$ ... (1)

Además: $(MR)^2 = (QR)(QR + 2r)$

$\Rightarrow a^2 = (x)(x + 2r)$ ... (2)

En el ⊿ORS aplicamos el teorema de Pitágoras:

$(OS)^2 = (OR)^2 + (RS)^2$

Pero: $(OS)^2 = r^2 + b^2$

Reemplazando:

$r^2 + b^2 = (r + x)^2 + x^2$

$\therefore r^2 + b^2 = r^2 + 2rx + x^2 + x^2$

$\Rightarrow b^2 = x(x + 2r) + x^2$

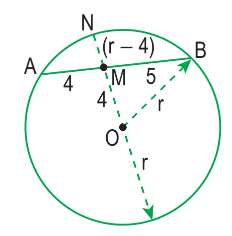
De la ecuación (2): $b^2 = a^2 + x^2$

$\therefore x = \sqrt{b^2 - a^2}$

**9** En una circunferencia de centro "O" se ubican los puntos A y B; luego se ubica "M" en $\overline{AB}$ tal que:

AB = 9 m, AM = MO = 4 m; calcula $\overline{BO}$.

**Resolución:**




De los datos: MB = 5

Piden: BO = r

Si prolongamos OM hasta el punto N:

$\Rightarrow MN = r - 4$

Por el teorema de las cuerdas:

$4 \times 5 = (r + 4)(r - 4)$

Resolvemos: r = 6

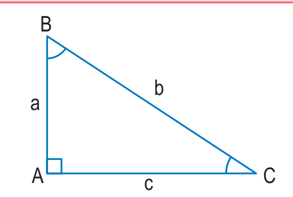
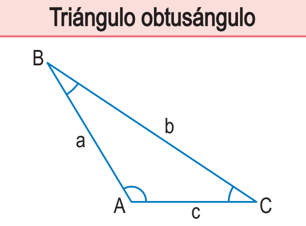
$\Rightarrow$ BO = 6 m

# RELACIONES MÉTRICAS EN TRIÁNGULOS OBLICUÁNGULOS

G

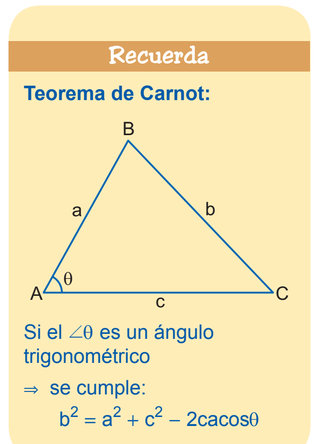
## NATURALEZA DE UN TRIÁNGULO

La naturaleza de un triángulo puede ser rectangular u oblicuangular, esto dependiendo cuál de las siguientes relaciones cumplan las longitudes de sus tres lados.

| Triángulo acutángulo | Triángulo rectángulo | Triángulo obtusángulo |
|---|---|---|
| |  |  |
| Cuando sus lados cumplen las siguientes condiciones: • $a^2 < b^2 + c^2$ • $b^2 < a^2 + c^2$ • $c^2 < b^2 + a^2$ | Cuando sus lados cumplen las siguientes condiciones: • $a^2 < b^2 + c^2$ • $b^2 = a^2 + c^2$ • $c^2 < a^2 + b^2$ | Cuando sus lados cumplen las siguientes condiciones: • $a^2 < b^2 + c^2$ • $b^2 > a^2 + c^2$ • $c^2 < a^2 + b^2$ |

**Recuerda**

**Teorema de Carnot:**




Si el $\angle\theta$ es un ángulo trigonométrico

$\Rightarrow$ se cumple:

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ca\cos\theta$

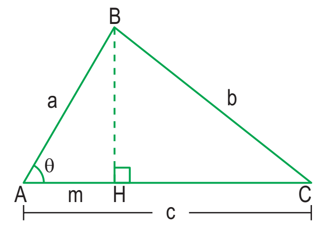


## TEOREMAS PRINCIPALES

Cualquiera que sea la naturaleza de un triángulo; éste cumple con los siguientes teoremas:

### A) Teorema de Euclides

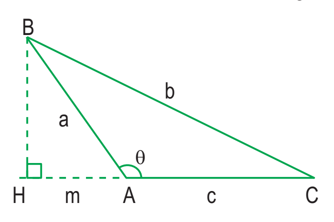
**Primer caso:** cuando el $\triangle ABC$ es acutángulo:




Si $\theta < 90°$ y $m = \text{Proy}_{\overline{AC}}\overline{AB}$

$\Rightarrow$ Se cumple: $b^2 = a^2 + c^2 - 2cm$

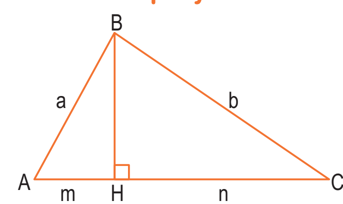
**Segundo caso:** cuando el $\triangle ABC$ es obtusángulo:




Si $\theta > 90°$ y $m = \text{Proy}_{\overline{AC}}\overline{AB}$

$\Rightarrow$ Se cumple: $b^2 = a^2 + c^2 + 2cm$

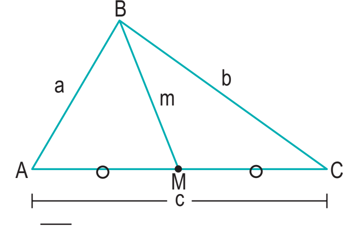
### B) Teorema de las proyecciones




Si $m = \text{Proy}_{\overline{AC}}\overline{AB}$ y $n = \text{Proy}_{\overline{AC}}\overline{BC}$

$\Rightarrow$ Se cumple: $b^2 - a^2 = n^2 - m^2$

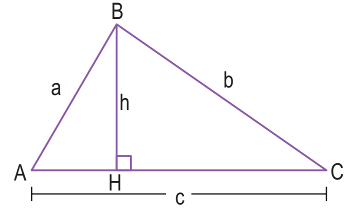
### C) Teorema de la mediana




Si $\overline{BM}$ es la mediana relativa al lado AC

$\Rightarrow$ Se cumple: $a^2 + b^2 = 2m^2 + \frac{c^2}{2}$

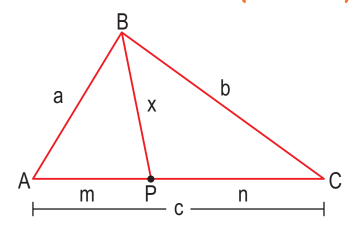
### D) Teorema de Herón (altura)




Si p es el semiperímetro del $\Delta ABC$ $(p = \frac{1}{2}(a+b+c))$

$\Rightarrow$ Se cumple: $h = \frac{2}{c}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

### E) Teorema de Steward (ceviana)




Si $\overline{BP}$ es una ceviana relativa al lado AC

$\Rightarrow$ Se cumple: $a^2n + b^2m = x^2c + cmn$

**Observación**

**Teorema de la proyección de la mediana:**

Si $\overline{BM}$ es mediana y

$e = \text{Proy}_{\overline{AC}}\overline{BM}$

$\Rightarrow$ Se cumple: $b^2 - a^2 = 2ec$

**Nota**

El Teorema de la Mediana es también llamado "**Teorema de Apolonio**", quien fue un gran filósofo y matemático de la escuela pitagórica.

### F) Teorema de la bisectriz interior

Si $\overline{BP}$ es una bisectriz interior:

$\Rightarrow$ Se cumple: $x^2 = ab - mn$

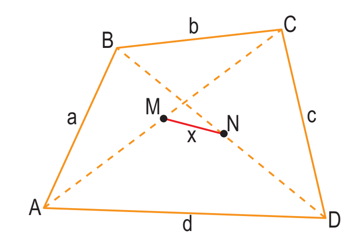
### G) Teorema de la bisectriz exterior

Si $\overline{BE}$ es una bisectriz exterior:

$\Rightarrow$ Se cumple: $y^2 = mn - ab$

### H) Teorema de Euler

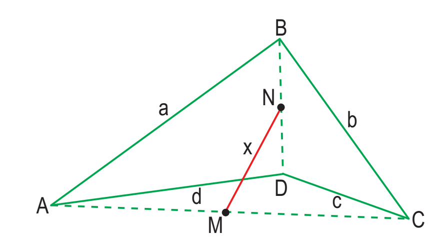
**I) En un cuadrilátero convexo**




Si M y N son puntos medios de $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ respectivamente; además AC = m y BD = n

$\Rightarrow$ Se cumple: $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = m^2 + n^2 + 4x^2$

**II) En un cuadrilátero cóncavo**



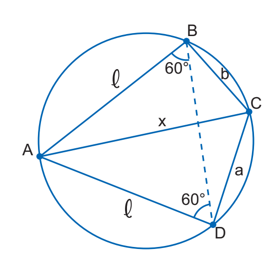

Si M y N son puntos medios de $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ respectivamente; además AC = m y BD = n

$\Rightarrow$ Se cumple: $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = m^2 + n^2 + 4x^2$

**Nota**

**Teorema de Chadú**

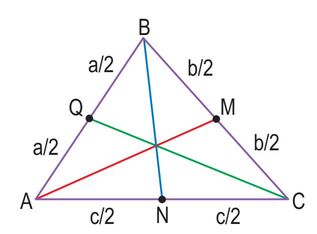
Si en un cuadrilátero inscriptible tres de sus vértices forman un triángulo equilátero, se cumple que la distancia del cuarto vértice al vértice más alejado es igual a la suma de las distancias de este a los otros dos vértices del triángulo equilátero.




Si el ⌂ABCD es inscriptible y AB = BD = AD = ℓ

$\Rightarrow$ Se cumple: x = a + b

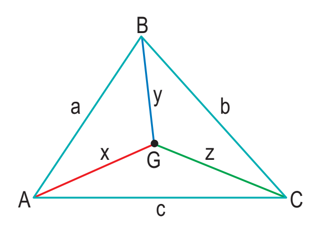
### I) Primer teorema de Booth




Si AM = m, BN = n y CQ = e

$\Rightarrow$ Se cumple $m^2 + n^2 + e^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2)$

### J) Segundo teorema de Booth



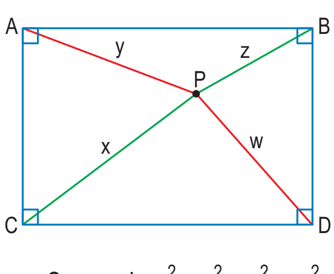

Si G es el baricentro del $\triangle ABC$

$\Rightarrow$ Se cumple: $x^2 + y^2 + z^2 = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2)$

### K) Teorema de Marlen

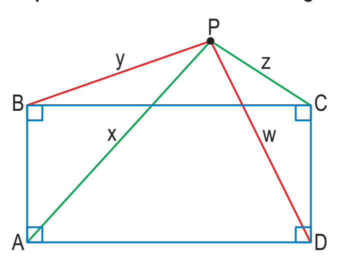
En un rectángulo, la suma de los cuadrados de las longitudes de los segmentos que unen un punto cualquiera, con los vértices opuestos de dicho rectángulo son iguales. Es por ello que se presentan dos casos; dependiendo de la ubicación del punto cualquiera:

**Cuando el punto P es interno al rectángulo ABCD**




$\Rightarrow$ Se cumple: $x^2 + z^2 = y^2 + w^2$

**Cuando el punto P es externo al rectángulo ABCD**




$\Rightarrow$ Se cumple: $x^2 + z^2 = y^2 + w^2$

# Problemas resueltos

**1** Las longitudes de los lados de un triángulo son 5, 6 y 7. Calcula la longitud de la proyección del lado menor sobre el lado mayor.

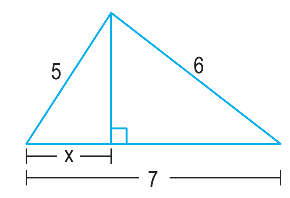
**Resolución:**

$7 > 6 > 5$

$7^2 < 6^2 + 5^2$

$49 < 61$

$\Rightarrow$ El triángulo es acutángulo.




Primer teorema de Euclides:

$6^2 = 7^2 + 5^2 - 2(7)x$

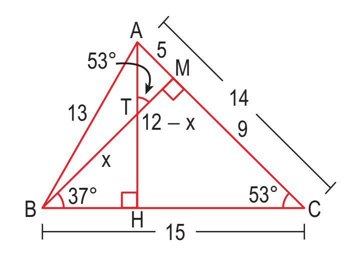
$14x = 38$

$x = \frac{19}{7}$

**2** En un triángulo ABC, AB = 13, BC = 15 y CA = 14. Calcula la distancia del ortocentro al vértice B.

**Resolución:**

Graficamos el triángulo ABC,siendo T su ortocentro.




Calculamos BM usando el teorema de Herón:

$2p_{\triangle ABC} = 13 + 15 + 14$

$p_{\triangle ABC} = 21$

$BM = \frac{2}{14}\sqrt{21(21-13)(21-15)(21-14)}$

$BM = 12 \Rightarrow MC = 9$ (El ⊿BMC es notable de 37° y 5°)

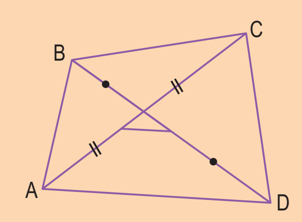
Luego $AM = 5$

En el ⊾ TMA:

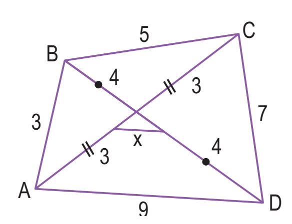
$\tan 53° = \frac{5}{12-x}$

$\frac{4}{3} = \frac{5}{12-x} \Rightarrow x = 8{,}25$

**3** En el cuadrilátero ABCD se tiene: AB = 3, BC = 5, CD = 7 y DA = 9. Además las diagonales BD = 8 y AC = 6. Calcula la longitud del segmento que une los puntos medios de las diagonales.




**Resolución:**




Por el teorema de Euler tenemos:

$3^2 + 5^2 + 7^2 + 9^2 = 6^2 + 8^2 + 4x^2$

$16^4 = 100 + 4x^2$

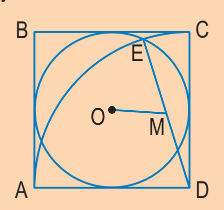
$4x^2 = 64$

$x^2 = 16$

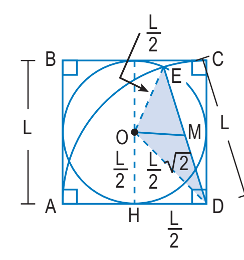
$x = 4$

Luego, el segmento que une los puntos medios de las diagonales mide 4.

**4** L es la longitud del lado del cuadrado ABCD, de centro O. D es centro del arco AEC y EM = MD. Halla OM.




**Resolución:**




El radio de la circunferencia mide: $\frac{L}{2}$

El radio del cuarto de circunferencia: L

En el $\triangle$EOD, por el teorema de la mediana:

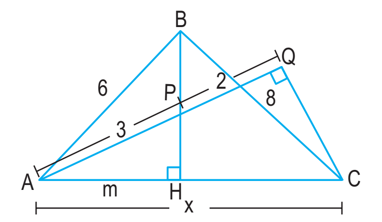
$OE^2 + OD^2 = 2(OM)^2 + \frac{ED^2}{2}$

$\left(\frac{L}{2}\right)^2 + \left(\frac{L}{2}\sqrt{2}\right)^2 = 2(OM)^2 + \frac{L^2}{2}$

De donde: $OM = \frac{L}{4}\sqrt{2}$

**5** En la región exterior relativa a $\overline{BC}$, de un triángulo ABC, se ubica el punto Q, tal que la altura BH interseca a $\overline{AQ}$ en P. Si m∠AQC = 90°, AB = 6, BC = 8, AP = 3 y PQ = 2, calcula AC.

**Resolución:**




Piden: AC = x

$\triangle$ABC: del teorema de Euclides

$8^2 = 6^2 + x^2 - 2xm$ ...(1)

Se observa que el ⏢PQCH es inscriptible, entonces por el teorema de las secantes:

$x(m) = 5(3)$

$xm = 15$ ...(2)

Reemplazamos (2) en (1):

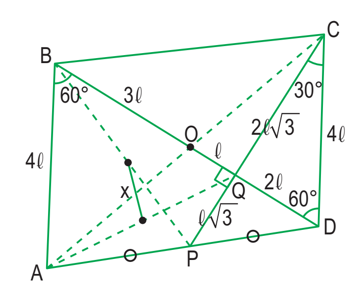
$64 = 36 + x^2 - 2(15)$

$x^2 = 58$

$\therefore\ x = \sqrt{58}$

**6** Sea un paralelogramo ABCD tal que en $\overline{AD}$ se ubica el punto medio P tal que $\overline{PC} \perp \overline{BD}$ en el punto Q. Calcula la distancia de los puntos medios de $\overline{AQ}$ y $\overline{BP}$ si $m\angle ABD = 60°$ y $AQ = 4\sqrt{7}$ cm.

**Resolución:**




Trazamos $\overline{AC}$, luego O es punto medio de $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$.
Q baricentro del △ACD:
$QD = 2(OQ)$ ; $CQ = 2(PQ)$

Luego: $m\angle ABD = m\angle BDC = 60°$
⊿CQD notable de 60° y 30°; sea $OQ = \ell$
$\Rightarrow QD = 2\ell$; $CQ = 2\ell\sqrt{3}$ ; $CD = AB = 4\ell$

Además: $QP = \ell\sqrt{3}$ ; $BO = 3\ell$
Se observa ABQ triángulo equilátero:
$\Rightarrow AB = BQ = AQ = 4\ell$

En △PQD y △PQB (T. Pitágoras):

$PD^2 = AP^2 = PQ^2 + QD^2$
$AP^2 = \ell\sqrt{3} + (2\ell)^2$
$AP^2 = 7\ell^2$

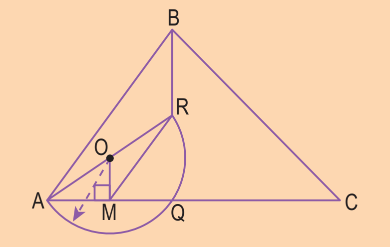
$BP^2 = BQ^2 + PQ^2$
$BP^2 = (4\ell)^2 + (\sqrt{3}\,\ell)^2$
$BP^2 = 19\ell^2$

En el ⏢ABQP (Teorema de Euler):

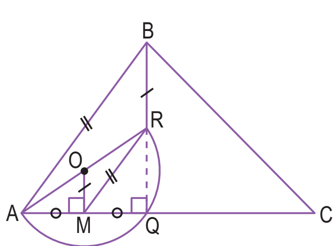
$$AB^2 + BQ^2 + PQ^2 + AP^2 = BP^2 + AQ^2 + 4x^2$$
$$(4\ell)^2 + (4\ell)^2 + (\sqrt{3}\,\ell)^2 + 7\ell^2 = 19\ell^2 + (4\ell)^2 + 4x^2$$
$$7\ell^2 = 4x^2$$
$$x = \frac{\ell\sqrt{7}}{2}$$

Por dato:
$AQ = 4\sqrt{7}$
$4\ell = 4\sqrt{7}$
$\ell = \sqrt{7}$
$\therefore x = \sqrt{7}\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right) = \frac{7}{2}$

**7** Según la figura, halla BR si AB = 10, BC = 17 y AC = 21
$\overline{BR} // \overline{OM}$ y $\overline{AB} // \overline{MR}$.




**Resolución:**




Trazamos $\overline{RQ}$:
$\Rightarrow \overline{RQ} \perp \overline{AQ}$ ($\overline{AR}$ diámetro)
Por dato $\overline{OM} // \overline{BR}$:
$\Rightarrow$ B; R y Q son colineales
$\overline{MR} // \overline{AB}$ entonces:
R: punto medio de $\overline{BQ}$
$\Rightarrow 2(BR) = BQ$

En el △ABC (teorema de Herón):

$BQ = \frac{2}{21}\sqrt{(p)(p-21)(p-10)(p-17)}$

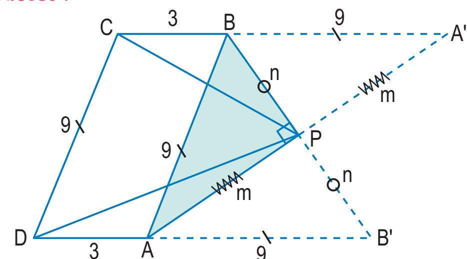
Donde: $p = \frac{21 + 17 + 10}{2}$
$p = 24$

$BQ = \frac{2}{21}\sqrt{(24)(24-21)(24-10)(24-17)}$

$BQ = 8$
$2(BR) = 8$
$\therefore BR = 4$

**8** Se tiene el romboide ABCD, las bisectrices exteriores de A y B concurren en P. Calcula CP, si $PD = 6\sqrt{2}$ AB = 9 y BC = 3.

**Resolución:**




Sean $\overline{AP}$ y $\overline{BP}$ bisectrices, entonces: $m\angle APB = 90°$
Prolongamos $\overline{CB}$ y $\overline{AP}$ hasta A'; $\overline{BP}$ y $\overline{DA}$ que se cortan en B'.
Los △ABA' y △BAB' son isósceles:
$\Rightarrow AB = AB' = BA' = 9$ ; $BP = PB' = n$ ; $AP = PA' = m$

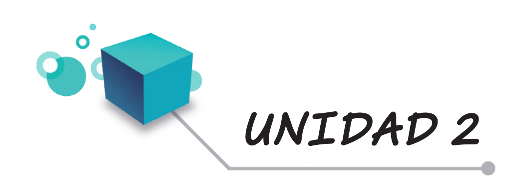
En el △CPA' (teorema de Steward):
$CP^2(9) + m^2(3) = n^2(12) + (3)(9)(12)$
$3CP^2 + m^2 = 4n^2 + 108$ ... (1)

En el △DPB' (teorema de Steward):
$DP^2(9) + n^2(3) = m^2(12) + (3)(9)(12)$
$3DP^2 + n^2 = 4m^2 + 108$ ... (2)

Sumamos (1) y (2):
$3DP^2 + 3CP^2 + m^2 + n^2 = 4m^2 + 4n^2 + 108 + 108$
$DP^2 + CP^2 = m^2 + n^2 + 72$
$(6\sqrt{2})^2 + CP^2 = m^2 + n^2 + 72$
$CP^2 = m^2 + n^2$ ... (3)

- Del △APB:
  $m^2 + n^2 = AB^2$
  $m^2 + n^2 = 9^2$

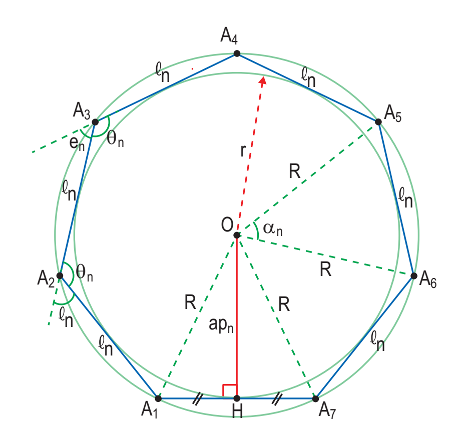
- En (3):
  $CP^2 = 9^2$
  $\therefore CP = 9$




# POLÍGONOS REGULARES

## DEFINICIÓN

Un polígono regular posee todos sus lados congruentes y todos sus ángulos iguales. Además todo polígono regular está inscrito y circunscrito a circunferencias concéntricas.




> **Recuerda**
>
> - En un polígono regular la medida de su ángulo central es igual a la medida de su ángulo exterior.
> - La apotema de un polígono regular tiene la misma longitud que su inradio.

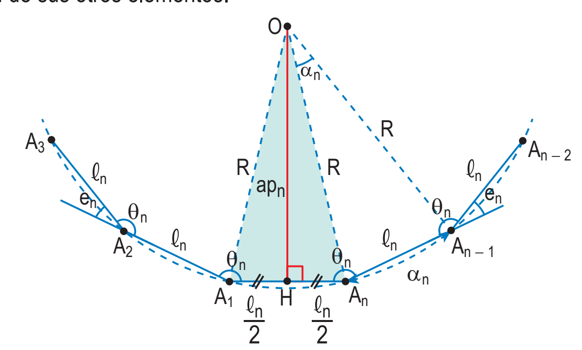


### Elementos del polígono regular

- $\ell_n$: longitud del lado del polígono regular.
- O: centro del polígono regular.
- n: número de lados del polígono.
- R: circunradio del polígono regular.
- r: inradio del polígono regular.
- $ap_n$ : apotema del polígono regular.
- $\angle\alpha_n$: ángulo central del polígono regular.
- $\angle\theta_n$: ángulo interior del polígono regular.
- $\angle e_n$: ángulo exterior del polígono.
- $\Delta A_1OA_7$: triángulo elemental del polígono regular.

## POLÍGONO REGULAR DE "n" LADOS

Dado un polígono de "n" número de lados, podemos calcular en función de este parámetro y la medida de su circunradio la magnitud de sus otros elementos.





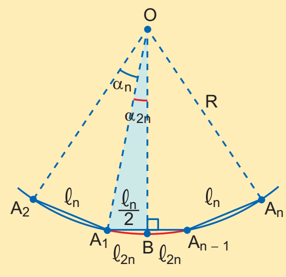

- Ángulo central: $\alpha_n = \dfrac{360°}{n}$
- Ángulo interno: $\theta_n = \dfrac{180°(n-2)}{n}$
- Ángulo externo: $e_n = \dfrac{360°}{n}$
- Lado: $\ell_n = R\sqrt{2-2\cos\alpha_n}$
- Apotema: $ap_n = \dfrac{1}{2}\sqrt{4R^2-\ell_n^2}$

  $ap_n = \dfrac{R}{2}\sqrt{2+2\cos\alpha_n}$
- Área: $A_{polígono} = \dfrac{1}{2}n\ell_n ap_n$

  $A_{polígono} = \dfrac{1}{2}nR^2 sen\alpha_n$

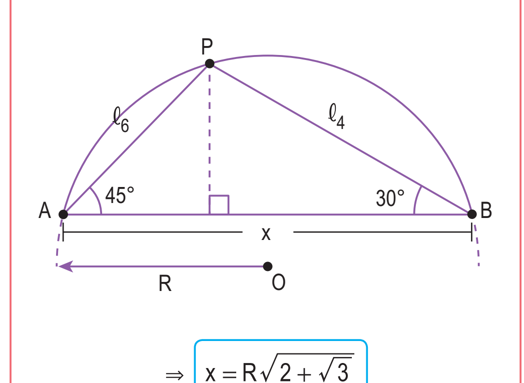
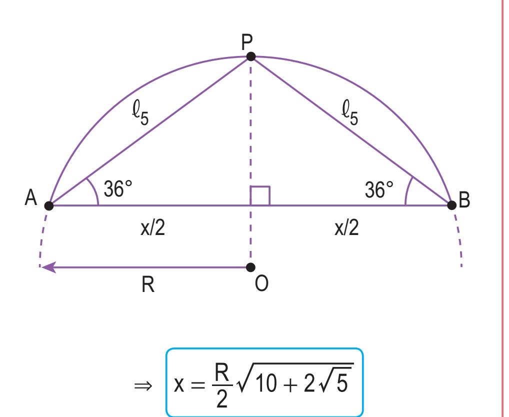
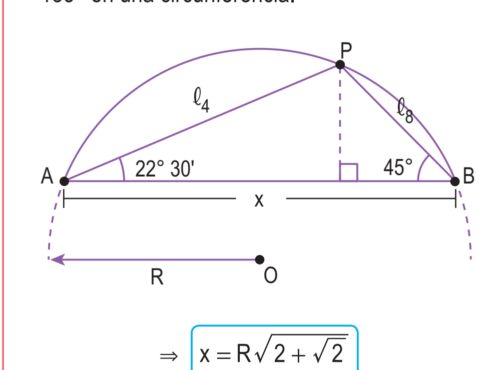
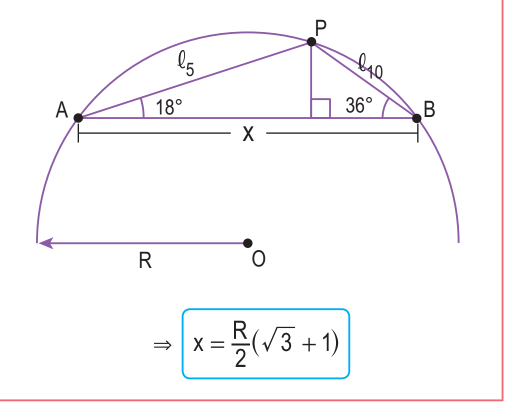


> **Atención**
>
> **Polígono regular de "2n" lados:**



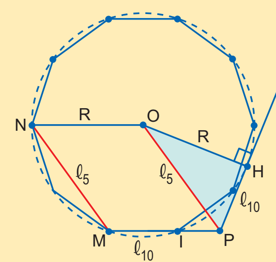

> Dado un polígono regular de "n" lados, se puede generar otro polígono regular a partir del primero prolongando sus apotemas hasta que se intersecan con la circunferencia circunscrita al polígono de "n" lados en los puntos que serán los nuevos vértices del nuevo polígono, el cual tendrá además "2n" lados y la longitud de su lado será:
>
> $\ell_{2n} = \sqrt{2R^2 - R\sqrt{4R^2-\ell_n^2}}$
>
> Donde:
> R: circunradio de los polígonos regulares de n y 2n lados.
> $\ell_n$: lado del polígono regular de n lados.

## Propiedades adicionales

| | |
|---|---|
| I. Longitud de una cuerda que determina un arco de 150° en una circunferencia.   $\Rightarrow$ $x = R\sqrt{2+\sqrt{3}}$ | II. Longitud de una cuerda que determina un arco de 144° en una circunferencia.   $\Rightarrow$ $x = \frac{R}{2}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$ |
| III. Longitud de una cuerda que determina un arco de 135° en una circunferencia.   $\Rightarrow$ $x = R\sqrt{2+\sqrt{2}}$ | IV. Longitud de una cuerda que determina un arco de 108° en una circunferencia.   $\Rightarrow$ $x = \frac{R}{2}(\sqrt{3}+1)$ |

**Observación**

Relación entre los lados de un pentágono ($\ell_5$), hexágono ($\ell_6$) y un decágono ($\ell_{10}$).




El cuadrilátero MNOP es un paralelogramo y $\overline{MN} = \ell_5$

Además $MI = \ell_{10}$ y $IP = R - \ell_{10}$

Luego:

$\frac{\ell_{10}}{R-\ell_{10}} = \frac{R}{\ell_{10}} \Rightarrow \ell_{10}^2 = R(R-\ell_{10})$

Teorema de la tangente:

$(HP)^2 = R(R - \ell_{10})$

$\Rightarrow$ $HP = \ell_{10}$

$\therefore$ Se cumple: $\ell_5^2 = \ell_{10}^2 + R^2$

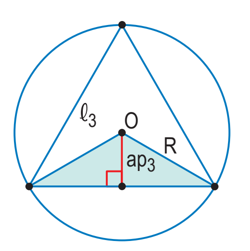
Pero: $R^2 = \ell_6^2$

$\Rightarrow$ $\ell_5^2 = \ell_{10}^2 + \ell_6^2$



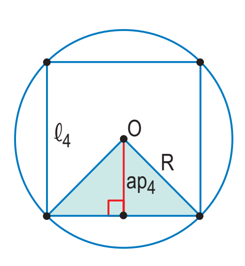
## CUADRO DE POLÍGONOS NOTABLES

**Triángulo equilátero (n = 3)**



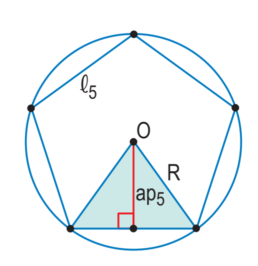

| Ángulos | Segmentos | Área |
|---|---|---|
| $\alpha_3 = 120°$ | $\ell_3 = R\sqrt{3}$ | $A_3 = \left(\frac{n}{2}\right)\ell_3 ap_3$ |
| $\theta_3 = 60°$ | $\ell_3 = (1{,}732)R$ | $A_3 = \left(\frac{3}{4}\right)R^2\sqrt{3}$ |
| $e_3 = 120°$ | $ap_3 = R/2$ | $A_3 = (1{,}299)R^2$ |
| | $ap_3 = (0{,}5)R$ | |

**Tetrágono regular o cuadrado (n = 4)**




| Ángulos | Segmentos | Área |
|---|---|---|
| $\alpha_4 = 90°$ | $\ell_4 = R\sqrt{2}$ | $A_4 = \left(\frac{n}{2}\right)\ell_4 ap_4$ |
| $\theta_4 = 90°$ | $\ell_4 = (1{,}414)R$ | $A_4 = \left(\frac{4}{2}\right)R^2$ |
| $e_4 = 90°$ | $ap_4 = R(\sqrt{2}/2)$ | $A_4 = (2)R^2$ |
| | $ap_4 = (0{,}707)R$ | |

### Pentágono regular (n = 5)




**Ángulos**

$\alpha_5 = 72°$

$\theta_5 = 108°$

$e_5 = 72°$

**Segmentos**

$\ell_5 = \left(\frac{1}{2}\right)R\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$

$\ell_5 = (1{,}176)R$

$ap_5 = \left(\frac{1}{4}\right)R(\sqrt{5} + 1)$

$ap_5 = (0{,}809)R$

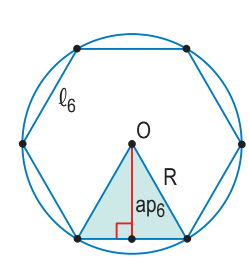
**Área**

$A_5 = \left(\frac{n}{2}\right)\ell_5 ap_5$

$A_5 = \left(\frac{5}{8}\right)R^2\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$

$A_5 = (2{,}378)R^2$

### Hexágono regular (n = 6)




**Ángulos**

$\alpha_6 = 60°$

$\theta_6 = 120°$

$e_6 = 60°$

**Segmentos**

$\ell_6 = R$

$\ell_6 = R$

$ap_6 = \left(\frac{1}{2}\right)R\sqrt{3}$

$ap_6 = (0{,}866)R$

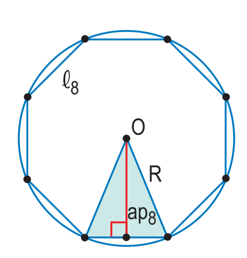
**Área**

$A_6 = \left(\frac{n}{2}\right)\ell_6 ap_6$

$A_6 = \left(\frac{3}{2}\right)R^2\sqrt{3}$

$A_6 = (2{,}598)R^2$

### Octágono regular (n = 8)




**Ángulos**

$\alpha_8 = 45°$

$\theta_8 = 135°$

$e_8 = 45°$

**Segmentos**

$\ell_8 = R\sqrt{2 - \sqrt{2}}$

$\ell_8 = (0{,}765)R$

$ap_8 = \left(\frac{1}{2}\right)R\sqrt{2 + \sqrt{2}}$

$ap_8 = (0{,}924)R$

**Área**

$A_8 = \left(\frac{n}{2}\right)\ell_8 ap_8$

$A_8 = 2R^2\sqrt{2}$

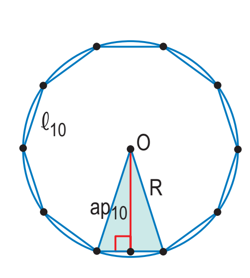
$A_8 = (2{,}828)R^2$

**Atención**

- Cuando el número de lados (n) crece al infinito $\Rightarrow \ell_n \approx 0$.
- También si el número de lados (n) crece al infinito $\Rightarrow ap_n \approx R$.
- Además si el número de lados (n) crece al infinito $\Rightarrow A_n \approx \pi R^2$.



### Decágono regular (n = 10)




**Ángulos**

$\alpha_{10} = 36°$

$\theta_{10} = 144°$

$e_{10} = 36°$

**Segmentos**

$\ell_{10} = \left(\frac{1}{2}\right)R(\sqrt{5} - 1)$

$\ell_{10} = (0{,}618)R$

$ap_{10} = \left(\frac{1}{4}\right)R\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$

$ap_{10} = (0{,}951)R$

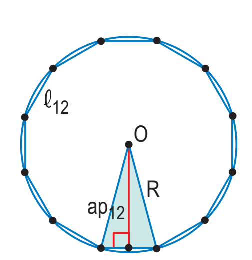
**Área**

$A_{10} = \left(\frac{n}{2}\right)\ell_{10} ap_{10}$

$A_{10} = \left(\frac{5}{4}\right)R^2\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$

$A_{10} = (2{,}939)R^2$

### Dodecágono regular (n = 12)




**Ángulos**

$\alpha_{12} = 30°$

$\theta_{12} = 150°$

$e_{12} = 30°$

**Segmentos**

$\ell_{12} = R\sqrt{2 - \sqrt{3}}$

$\ell_{12} = (0{,}518)R$

$ap_{12} = \left(\frac{1}{2}\right)R\sqrt{2 + \sqrt{3}}$

$ap_{12} = (0{,}966)R$

**Área**

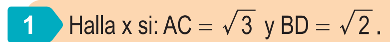
$A_{12} = \left(\frac{n}{2}\right)\ell_{12} ap_{12}$

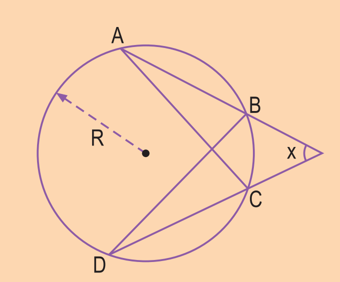
$A_{12} = \left(\frac{12}{2}\right)\frac{R^2}{2}$

$A_{12} = 3R^2$

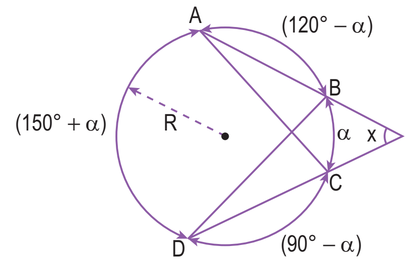
# Problemas resueltos

**1** Halla x si: $AC = \sqrt{3}$ y $BD = \sqrt{2}$.






**Resolución:**




Sea: $m\overset{\frown}{BC} = \alpha$

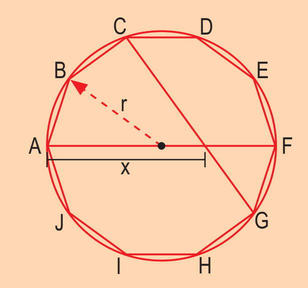
Como: $AC = R\sqrt{3} \Rightarrow m\overset{\frown}{AC} = 120°$

$BD = R\sqrt{2} \Rightarrow m\overset{\frown}{BD} = 90°$

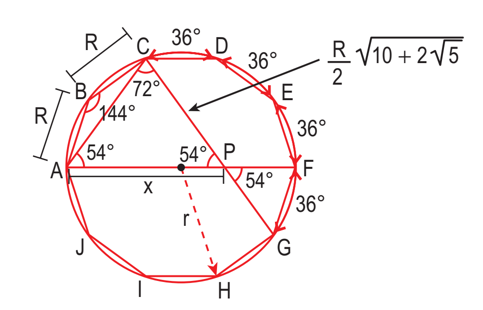
De la circunferencia: $m\overset{\frown}{AD} = 150° + \alpha$

Por propiedad: $x = \dfrac{150° + \alpha - \alpha}{2} \Rightarrow x = 75°$

**2** El lado del decágono regular ABCDEFGHIJ es R. Calcula x.




**Resolución:**




En el $\triangle$ ABC: $AC = \dfrac{R}{2}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$ $(AC = \ell_5)$

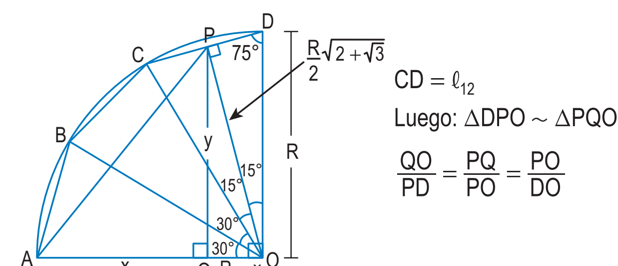
En el $\triangle$ ACP se cumple:

$x = \left(\dfrac{R}{2}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}\right)\dfrac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{2} \Rightarrow x = R\sqrt{5}$

**3** Dado el dodecágono regular ABCD...L inscrito en una circunferencia de radio R, P es punto medio de $\overline{CD}$. Entonces AP mide:

**Resolución:**

Del enunciado:




$CD = \ell_{12}$

Luego: $\triangle DPO \sim \triangle PQO$

$\dfrac{QO}{PD} = \dfrac{PQ}{PO} = \dfrac{PO}{DO}$

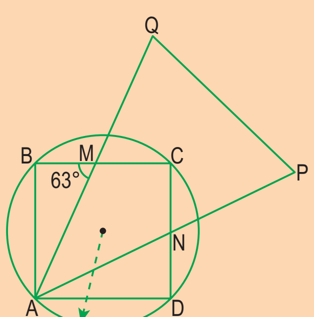
$\dfrac{R - x}{\frac{R}{2}\sqrt{2 - \sqrt{3}}} = \dfrac{y}{\frac{R}{2}\sqrt{2 + \sqrt{3}}} = \dfrac{\frac{R}{2}\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{R}$

Entonces: $y = \dfrac{R}{4}(2 + \sqrt{3}) \wedge x = \dfrac{3R}{4}$

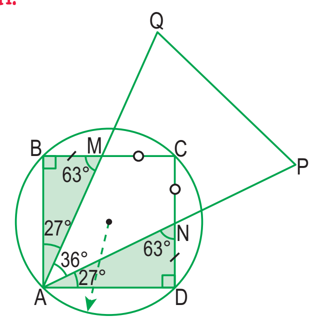
Pero: $AP^2 = x^2 + y^2$

Luego: $AP^2 = \dfrac{R^2}{4}(4 + \sqrt{3}) \Rightarrow AP = \dfrac{R}{2}\sqrt{4 + \sqrt{3}}$

**4** Si ABCD es un cuadrado, indica la medida de $\overline{PQ}$, donde MC = NC y NP = 1, además, NP es la sección aurea de AP.




**Resolución:**




Por dato MC = NC $\Rightarrow$ BM = ND

Se cumple: $\triangle MBA \cong \triangle NDA$ (caso LAL)

Entonces: $m\angle BAM = m\angle NAD = 27° \Rightarrow m\angle MAN = 36°$

Además: NP sección aurea de AP:

$NP = AP\dfrac{(\sqrt{5} - 1)}{2}$

$\Rightarrow 1 = AP\dfrac{(\sqrt{5} - 1)}{2} \Rightarrow AP = \dfrac{(\sqrt{5} + 1)}{2}$

En el $\triangle APQ$: $PQ = \ell_{10}$

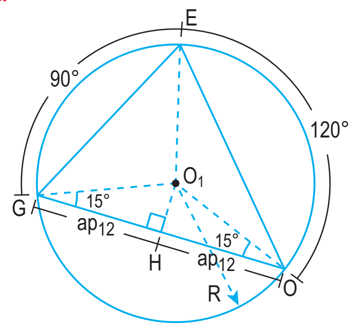
$$PQ = (AP)\frac{(\sqrt{5}-1)}{2}$$

$$PQ = \frac{(\sqrt{5}+1)}{2}\,\frac{(\sqrt{5}-1)}{2}$$

$\therefore\ PQ = 1$

**5** En una circunferencia de radio $\sqrt{30}$ cm, se inscribe el triángulo GEO, si $GE = 2\sqrt{15}$ cm y $EO = 3\sqrt{30}$ cm. Calcula GO.

**Resolución:**




Sea C circunferencia de radio $R = \sqrt{30}$ cm y centro $O_1$.

Del gráfico: $GE = 2\sqrt{15}$

$$GE = \sqrt{2}\,.\,\underbrace{\sqrt{30}}$$

$$GE = \sqrt{2}\quad R$$

$\Rightarrow\ GE = \ell_4;\ m\angle GO_1E = 90°$

También: $EO = 3\sqrt{10}$

$$EO = \sqrt{3}\,.\,\sqrt{30} \Rightarrow EO = \sqrt{3}\,R$$

$$EO = \ell_3;\ m\angle EO_1O = 120°$$

Luego: $m\angle GO_1O = 360° - 90° - 120° = 150°$

En el $\triangle GO_1O$ trazamos $O_1H$.

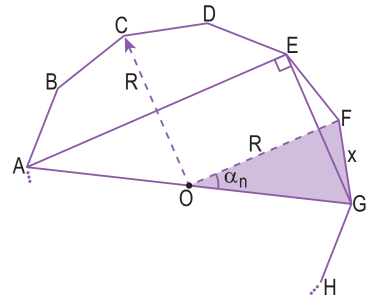
$$GH = HO = ap_{12} \Rightarrow GO = 2ap_{12}$$

$$GO = 2R\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} = \sqrt{30}\,\sqrt{2+\sqrt{3}}$$

$\therefore\ GO = \sqrt{60+30\sqrt{3}}$ cm

**6** En un polígono regular ABCDEFGH..., la $m\angle AEG = 90°$; si $AG - AE = 2$ cm. Calcula la longitud del lado de dicho polígono regular.

**Resolución:**




Por dato, $m\angle AEG = 90°$.

$\Rightarrow\ \overline{AG}$ es diámetro de la circunferencia de radio R.

Luego: $6\alpha_n = 180°$

$$\alpha_n = 30°$$

$$\frac{360°}{n} = 30°$$

$$n = 12$$

El polígono es un dodecágono regular, además: $m\angle EAG = 30°$

Luego: ⊿AEG es notable de 30° y 60°.

$$AG = 2R;\ AE = R\sqrt{3}$$

Del dato: $AG - AE = 2$

$$2R - R\sqrt{3} = 2$$

$$R = \frac{2}{2-\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow R = 4 + 2\sqrt{3}$$

En el $\triangle FOG$:

$$x = \ell_{12}$$

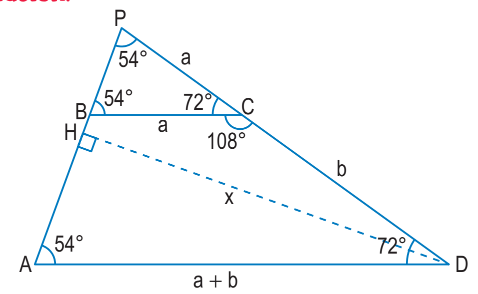
$$x = R\sqrt{2-\sqrt{3}}$$

$$x = (4+2\sqrt{3})\sqrt{2-\sqrt{3}}$$

$\therefore\ x = 2\sqrt{2+\sqrt{3}}$ cm

**7** En un trapecio ABCD de bases $\overline{BC}$ y $\overline{AD}$, si $m\angle BCD = 2m\angle BAD = 108°$. Además $BC + DC = 3(\sqrt{5}-1)$ cm, ¿cuánto dista D de $\overline{AB}$?

**Resolución:**




ABCD es un trapecio donde $\overline{BC} \,//\, \overline{AD}$.

Luego: $m\angle BCD = 108°$

Trazamos las prolongaciones de $\overline{AB}$ y $\overline{DC}$ que se intersecan en el punto P.

En el $\triangle PBC$: $m\angle BCP = 72°$

$$m\angle PBC = m\angle BAD$$

$$m\angle PBC = 54°$$

El $\triangle PBC$ y $\triangle PAD$ son isósceles

En el $\triangle PAD$.

$x = ap_5$

$$x = \frac{(a+b)(\sqrt{5}+1)}{4} \quad ...(1)$$

Por dato: $BC + DC = 3(\sqrt{5}-1)$

$$a + b = 3(\sqrt{5}-1)$$

En (1):

$$x = 3(\sqrt{5}-1)\frac{(\sqrt{5}-1)}{4}$$

$x = 3$ cm



# ÁREAS DE REGIONES TRIANGULARES



**Observación**

De acuerdo a la forma del contorno de la región plana cerrada, esta última se puede clasificar en triangulares, cuadrangulares, circulares, poligonales, curvilíneas o mixtilíneas.

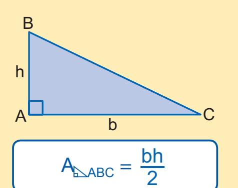


**Atención**

El área de una región plana cerrada R la representaremos mediante el símbolo: $A_R$

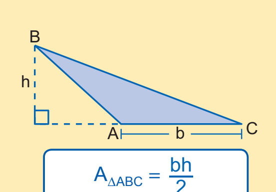
**Recuerda**

- En un triángulo rectángulo:



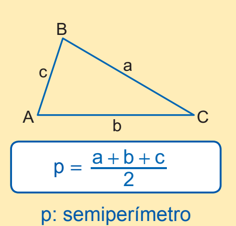

$A_{\triangle ABC} = \frac{bh}{2}$

- En un triángulo obtusángulo:




$A_{\Delta ABC} = \frac{bh}{2}$

- Semiperímetro:




$p = \frac{a+b+c}{2}$

p: semiperímetro



## CONCEPTOS PREVIOS

**Región plana cerrada.** Es una porción de un plano limitado por una línea cerrada, la cual se denomina contorno o borde de dicha región.

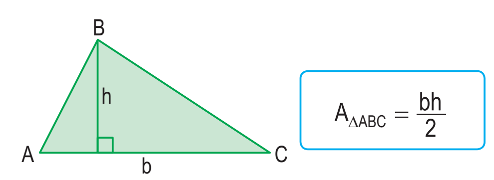
**Área de una región plana.** Es la medida de la extensión de dicha región.

### Postulados

| Postulado 1 | Postulado 2 | Postulado 3 |
|---|---|---|
| Dos regiones congruentes tienen áreas iguales.<br>[Figura: $R_1$, $A_1$; $R_2$, $A_2$]<br>Donde $A_1$ y $A_2$ son las áreas de las regiones $R_1$ y $R_2$. Se cumple:<br>Si $R_1 \cong R_2 \Rightarrow A_1 = A_2$ | El área de una región plana es igual a la suma de las áreas de todas sus regiones parciales.<br>[Figura: $R_1$, $R_2$, $R_3$; $A_1$, $A_2$, $A_3$]<br>Donde $A_1$, $A_2$ y $A_3$ son las áreas de las regiones parciales $R_1$, $R_2$ y $R_3$. se cumple:<br>$A_T = A_1 + A_2 + A_3$<br>$A_T$: área total de la región plana. | El área de una región cuadrada es igual al cuadrado de la longitud de su lado.<br>[Figura: B, C, A, D; $\ell$]<br>Si el ▭ABCD es una región cuadrada, entonces:<br>$A_{\square ABCD} = \ell^2$ |

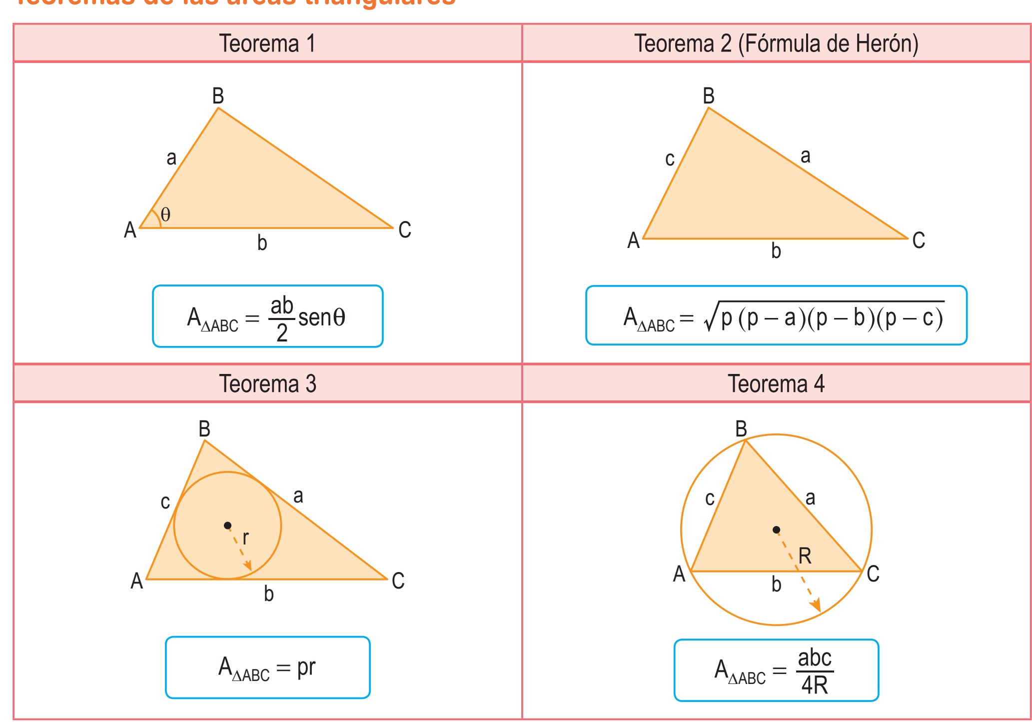
## ÁREAS DE REGIONES TRIANGULARES

El área de una región triangular es igual al semiproducto de la longitud de un lado y la altura relativa a dicho lado.

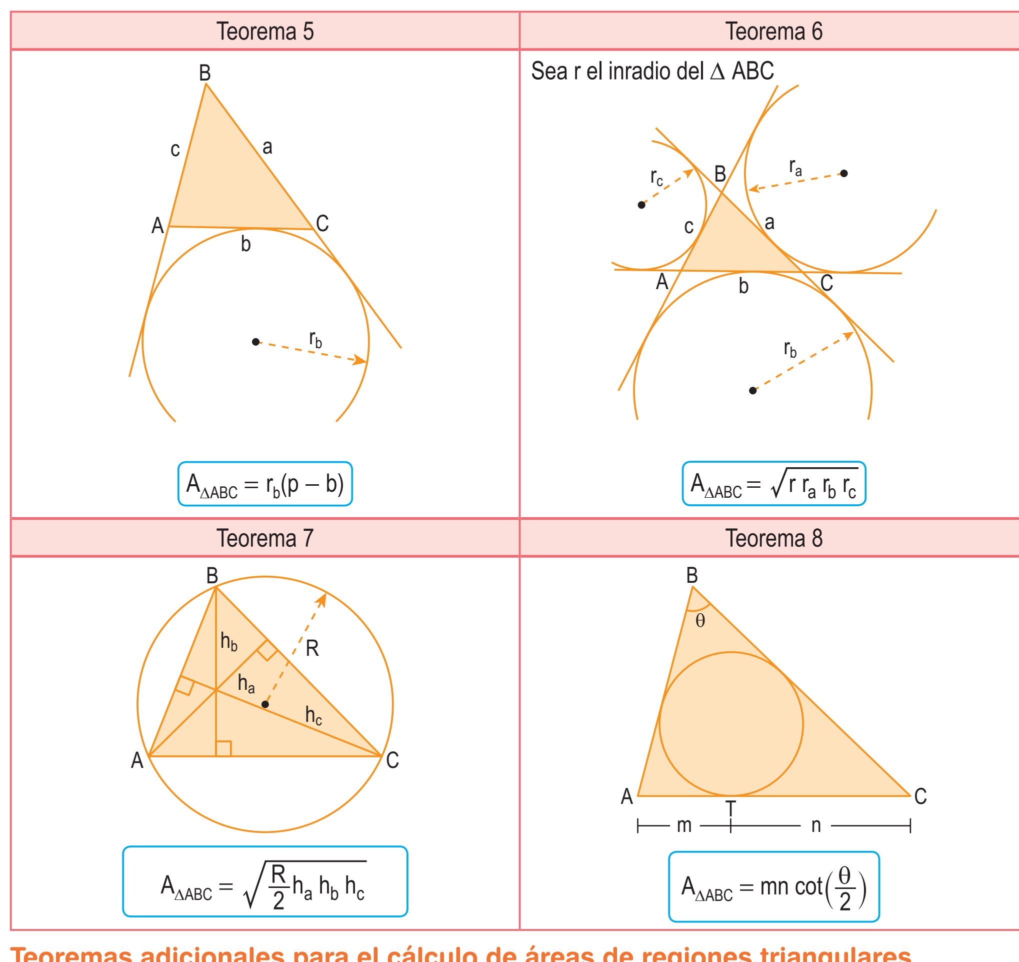


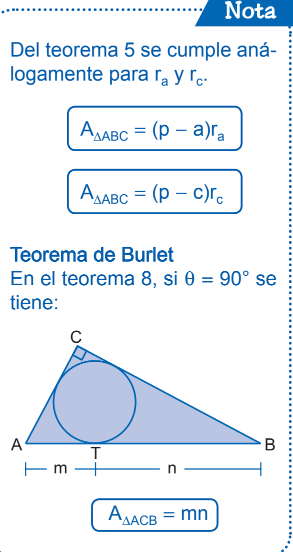

$$A_{\Delta ABC} = \frac{bh}{2}$$

### Teoremas de las áreas triangulares



| Teorema 1 | Teorema 2 (Fórmula de Herón) |
|---|---|
| [Figura: B, a, A, θ, b, C]<br>$A_{\Delta ABC} = \frac{ab}{2}\operatorname{sen}\theta$ | [Figura: B, c, a, A, b, C]<br>$A_{\Delta ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ |
| **Teorema 3** | **Teorema 4** |
| [Figura: B, c, a, r, A, b, C]<br>$A_{\Delta ABC} = pr$ | [Figura: B, c, a, R, A, b, C]<br>$A_{\Delta ABC} = \frac{abc}{4R}$ |

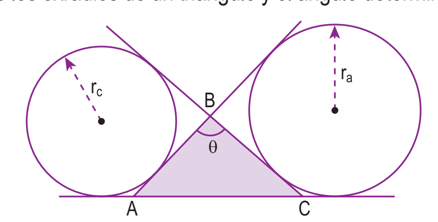




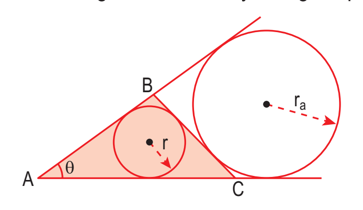

## Teoremas adicionales para el cálculo de áreas de regiones triangulares

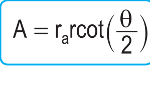
1. A partir de dos de los exradios de un triángulo y el ángulo determinado por los lados relativos a dichos exradios.

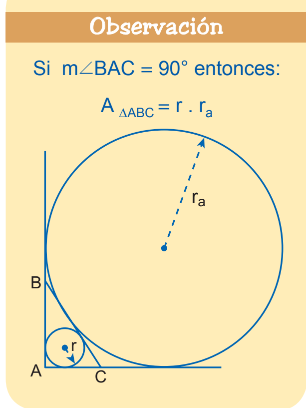


$$A = r_c r_a \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

2. A partir del inradio del triángulo, su exradio y el ángulo que se opone al lado relativo a la circunferencia exinscrita.



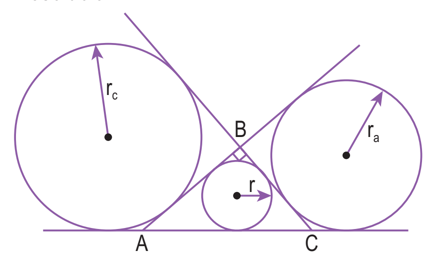



Ejemplo:

Halla el área de un triangulo ABC recto en B cuyo inradio mide 3 u y cuyos exradios correspondientes a los catetos miden 5 u y 7 u.

Resolución:



Por propiedad:

$S = r_c r_a \tan\left(\frac{m\angle B}{2}\right)$

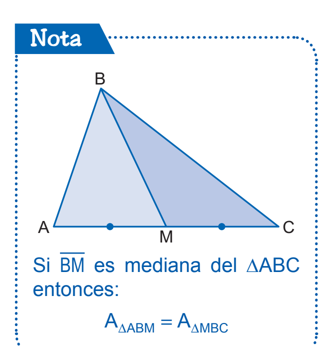
$S = 7(5)\tan(45°)$

$S = 35$ u

Donde: $r = 3$ u; $r_c = 7$ u; $r_a = 5$ u



**Nota**

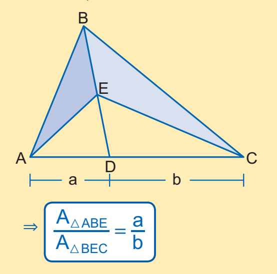



Si $\overline{BM}$ es mediana del $\Delta ABC$ entonces:

$$A_{\Delta ABM} = A_{\Delta MBC}$$

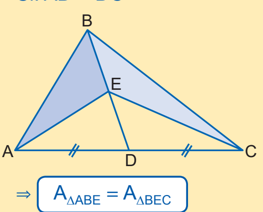
**Atención**

1. Del cuadrilatero, se cumple:
   Si: $AD \neq DC$



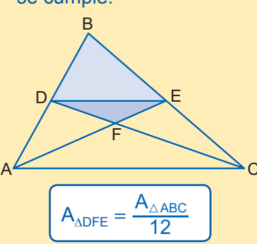

$$\Rightarrow \frac{A_{\triangle ABE}}{A_{\triangle BEC}} = \frac{a}{b}$$

2. Del cuadrilatero, se cumple:
   Si: $AD = DC$



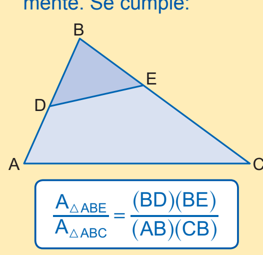

$$\Rightarrow A_{\Delta ABE} = A_{\Delta BEC}$$

3. Si D y E son puntos medios de $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ respectivamente, se cumple:




$$A_{\Delta DFE} = \frac{A_{\triangle ABC}}{12}$$

4. Si D y E son puntos aleatorios de $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ respectivamente. Se cumple:

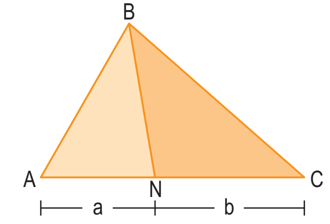



$$\frac{A_{\triangle ABE}}{A_{\triangle ABC}} = \frac{(BD)(BE)}{(AB)(CB)}$$



## RELACIONES ENTRE ÁREAS

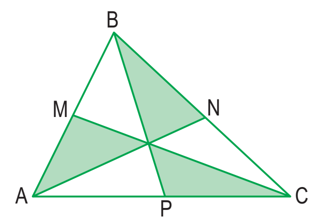
La razón entre las áreas de las regiones parciales determinadas por una ceviana interior en una región triangular, es igual a la razón entre las longitudes de los segmentos parciales determinados por dicha ceviana en su lado relativo.




$$\frac{A_{\triangle ABN}}{A_{\triangle NBC}} = \frac{a}{b}$$

### Teoremas

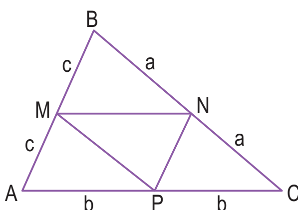
1. En todo triángulo, al trazar las tres medianas, la región triangular se divide en seis regiones triangulares de igual área.




Si: $\overline{AN}$, $\overline{BP}$ y $\overline{CH}$ son medianas del $\Delta$ ABC, entonces:

$$A_{\Delta AMG} = A_{\Delta MBG} = A_{\Delta AGP} = A_{BGN} = A_{\Delta GNC} = A_{\Delta GCP}$$

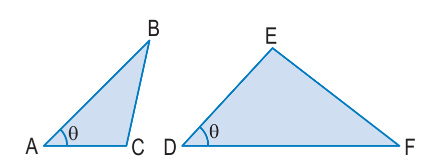
2. En todo triángulo, al unir los puntos medios de sus tres lados, se forman cuatro regiones triangulares de igual área.




Si M, N y P son puntos medios de $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$, respectivamente, entonces:

$$A_{\Delta AMP} = A_{\Delta MNP} = A_{\Delta MBN} = A_{\Delta PNC}$$

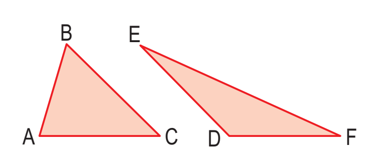
3. Si dos triángulos tienen una de sus medidas angulares iguales, las áreas de sus regiones triangulares son proporcionales al producto de las longitudes de los lados que determinan dichos ángulos.




Si: $m\angle BAC = m\angle EDF$, entonces:

$$\frac{A_{\triangle ABC}}{A_{\triangle DEF}} = \frac{(AB)(AC)}{(DE)(DF)}$$

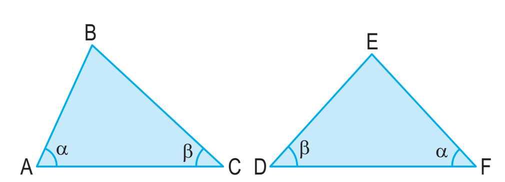
4. Si uno de los ángulos interiores de un triángulo es suplementario con uno de los ángulos interiores de otro triángulo, entonces las áreas de sus regiones triangulares son proporcionales al producto de las longitudes de los lados que determinan dichos ángulos.




Si: $m\angle BCA + m\angle EDF = 180°$, entonces:

$$\frac{A_{\triangle ABC}}{A_{\triangle DEF}} = \frac{(AC)(BC)}{(ED)(DF)}$$

5. Si dos triángulos son semejantes, entonces las áreas de sus regiones triangulares son proporcionales a los cuadrados de las longitudes de sus lados proporcionales.



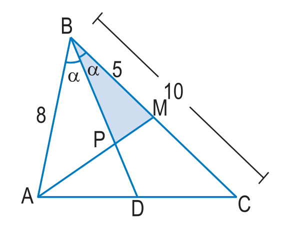

Si: $\Delta ABC \sim \Delta DEF$, entonces:

$$\frac{A_{\triangle ABC}}{A_{\triangle DEF}} = \frac{(AB)^2}{(FE)^2} = \frac{(BC)^2}{(DE)^2} = \frac{(AC)^2}{(FD)^2}$$

# Problemas resueltos

**1** En un triángulo ABC, de área 26 $cm^2$, AB = 8 cm y BC = 10 cm. La mediana AM y la bisectriz interior BD se intersecan en el punto P. Halla el área de la región triangular BPM.

**Resolución:**




Piden: $A_{\triangle BPM}$

Para el $\triangle ABC$, como $\overline{AM}$ es mediana:

$$A_{\triangle ABM} = \frac{A_{\triangle ABC}}{2} \Rightarrow A_{\triangle ABM} = 13\ cm^2$$

Siendo: $A_{\triangle ABP} + A_{\triangle BPM} = A_{\triangle ABM}$

$$A_{\triangle ABP} + A_{\triangle BPM} = 13\ cm^2 \quad ...(1)$$

Además:

$$\frac{A_{\triangle BPM}}{A_{\triangle BPM}} = \frac{AB}{BM} = \frac{8}{5} \Rightarrow A_{\triangle ABP} = \frac{8}{5}A_{\triangle BPM} \quad ...(2)$$

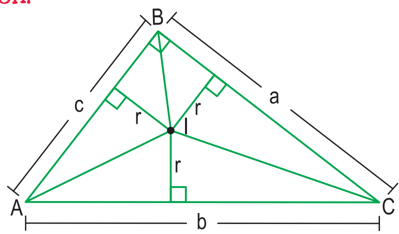
Sustituyendo (2) en (1):

$$\frac{8}{5}A_{\triangle BPM} + A_{\triangle BPM} = 13\ cm^2 \Rightarrow \frac{13}{5}A_{\triangle BPM} = 13\ cm^2$$

$\therefore A_{\triangle BPM} = 5\ cm^2$

**2** En un triángulo rectángulo ABC, recto en B, de incentro I, la suma de los cuadrados de las áreas de las regiones ABI y BCI es L, calcula el área de la región ACI.

**Resolución:**




Piden: $A_{\triangle ACI}$

Datos:

I: incentro del ⊿ABC ⇒ I equidista de $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$.

$$A^2_{\triangle ABI} + A^2_{\triangle ACI} = L$$

$$\left(\frac{cr}{2}\right)^2 + \left(\frac{ar}{2}\right)^2 = L$$

Factorizando: $\frac{r^2}{4}(a^2 + c^2) = L$ ... (1)

Pero se sabe, por pitágoras: $b^2 = a^2 + c^2$

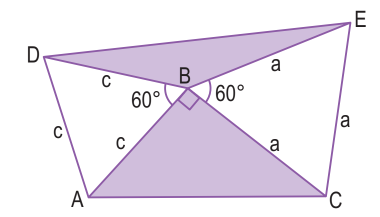
Reemplazando en (1): $\frac{r^2(b^2)}{4} = L \Rightarrow \left(\frac{rb}{2}\right)^2 = L$

Pero: $A_{\triangle ACI} = \frac{br}{2}$ $\quad \therefore A_{\triangle ACI} = \sqrt{L}$

**3** En un triángulo rectángulo ABC, recto en B, exteriormente al triángulo se construyen los triángulos equiláteros ADB y BEC. Calcula la razón de las áreas de las regiones ABC y DBE.

**Resolución:**

Piden: $\frac{A_{\triangle ABC}}{A_{\triangle DBE}}$




Del gráfico:

En B: $m\angle DBE = 150°$

Del triangulo rectangulo:

$$A_{\triangle ABC} = \frac{ac}{2} \quad ...(1)$$

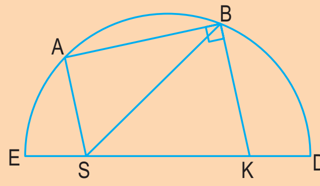
Del Teorema 1:

$$A_{\triangle DBE} = \frac{ac}{2}\text{sen}150° \quad ...(2)$$

Dividiendo (1) y (2):

$$\frac{A_{\triangle ABC}}{A_{\triangle DBE}} = \frac{\frac{ac}{2}}{\frac{ac}{2}\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{4ac}{2ac} = 2$$

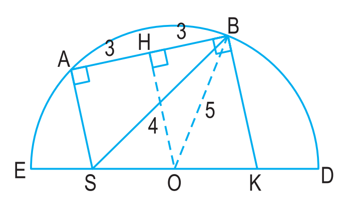
**4** De la semicircunferencia: $\overline{BK}$ // $\overline{AS}$, AB = 6 cm, ED = 10 cm, KB = 5,5 cm. Calcula el área de la región triangular ABS.




**Resolución:**

Como: $\overline{AS}$ // $\overline{BK}$ y $\overline{AB} \perp \overline{BK} \Rightarrow \overline{AB} \perp \overline{AS}$

Del gráfico:




Nos piden: $A_{\triangle SAB} = \frac{(AS)(AB)}{2}$ ...(1)

Desde O trazamos: $\overline{OH} \perp \overline{AB} \Rightarrow AH = BH = 3$

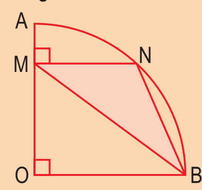
También: OB = 5, entonces: OH = 4

En el trapecio SABK: $OH = \frac{AS + 5,5}{2} \Rightarrow AS = 2,5$

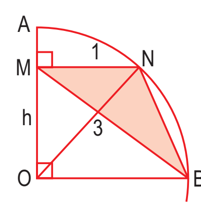
Reemplazamos: en (1)

$$A_{\triangle SAB} = \frac{(AS)(AB)}{2} = \frac{(2,5)(6)}{2} = 7,5\ cm^2$$

**5** Calcula el área del triángulo MNB, si: AO = OB = 3 cm y MN = 1 cm.




**Resolución:**




Sea, R radio:

Si: AO = OB = 3 ⇒ R = 3

Del gráfico:

R= ON = 3

Aplicamos el teorema de Pitágoras en el ⊿OMN:

$h^2 + 1^2 = 3^2$

$h = 2\sqrt{2}$ cm

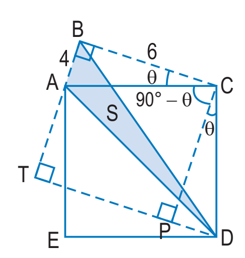
Nos piden $S_{MNB}$:

$$\Rightarrow S_{\Delta MNB} = \frac{(MN)(MO)}{2}$$

$$\Rightarrow S_{\Delta MNB} = \frac{1(2\sqrt{2})}{2} = \sqrt{2}\ \text{cm}^2$$

**6** En un triángulo ABC (m∠B = 90°), se construye exteriormente el cuadrado ACDE; si AB = 4 y BC = 6, calcula el área del triángulo ABD.

**Resolución:**




Construimos otro cuadrado BCPT, tal que A ∈ $\overline{BT}$

Por semejanza:

⊿ABC ≅ ⊿DPC (Caso ALA)

⇒ AB = PD = 4 m

Como BC = TP = 6 m

⇒ TD = 6 + 4 = 10

Nos piden:

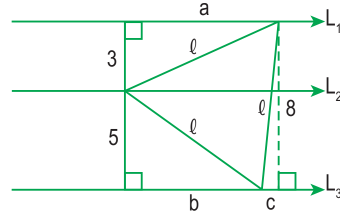
$$S = \frac{bh}{2} = \frac{(AB)(TO)}{2}$$

$$\Rightarrow S = \frac{(10)(4)}{2}$$

$S = 20\ \text{m}^2$

**7** Calcula el área de un triángulo equilátero cuyos vértices están en tres rectas paralelas coplanares tales que la paralela intermedia dista de las otras 3 y 5 unidades respectivamente.

**Resolución:**




Aplicamos el teorema de Pitágoras:

$a = \sqrt{\ell^2 - 9}$

$b = \sqrt{\ell^2 - 25}$

$c = \sqrt{\ell^2 - 64}$

De la gráfica: a = b + c

$\sqrt{\ell^2 - 9} = \sqrt{\ell^2 - 25} + \sqrt{\ell^2 - 64}$

Resolviendo tenemos: $\ell^2 = \frac{196}{3}$ ...(1)

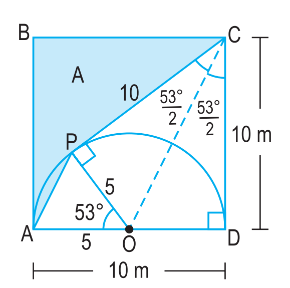
Piden: $A_{\Delta} = \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4}$ ...(2)

Reemplazando (1) en (2):

$$A_{\Delta} = \frac{49\sqrt{3}}{3}$$

**8** En un cuadrado ABCD, se traza interiormente la semicircunferencia de diámetro AD, luego se traza la tangente CP a dicha semicircunferencia (P es punto de tangencia) Calcula el área de la región cuadrangular ABCP, si AD = 10 m.

**Resolución:**




De la gráfica:

$\frac{AD}{2} = AO = PO = 5$

Por ángulos notables:

$m\angle PCO = m\angle OCD = \frac{53°}{2}$

⇒ m∠AOP = 53°

Piden: $A_{\square ABCP} = A$

$A_{\square ABCD} = A + A_{\Delta AOP} + 2A_{\Delta ODC}$

$100 = A + \frac{5(5)}{2}\text{Sen}53° + 2\left(\frac{10.5}{2}\right)$

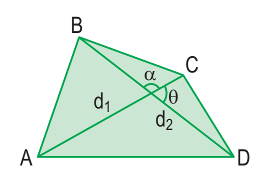
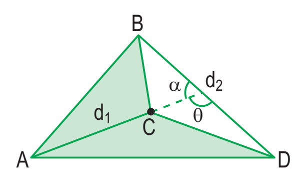
$100 = A + 10 + 50$

$\Rightarrow A = 40\ \text{m}^2$

# ÁREAS DE REGIONES CUADRANGULARES

## DEFINICIÓN

El área de una región cuadrangular convexa o no convexa es igual al semiproducto de las longitudes de las diagonales por el seno de la medida del ángulo determinado por dichas diagonales.

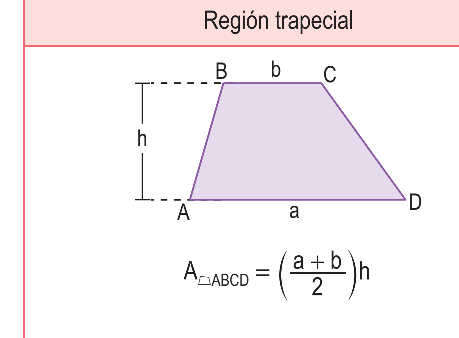
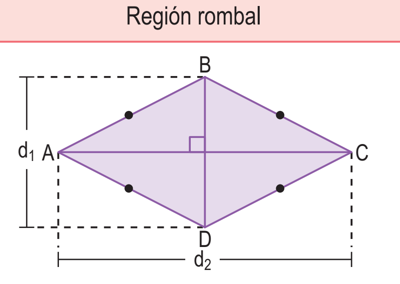
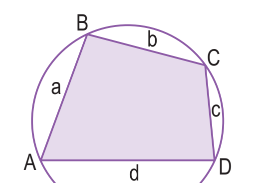
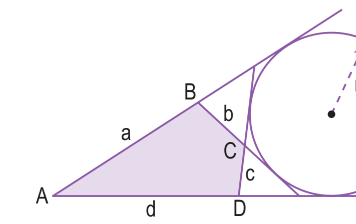
| Región cuadrangular convexa | Región cuadrangular no convexa |
|---|---|
| <br>$d_1$ y $d_2$: longitudes de las diagonales del $\square$ABCD.<br>α y θ: medida de los ángulos determinados por las diagonales del $\square$ABCD.<br>Entonces:<br>$A_{\square ABCD}=\frac{d_1\,d_2}{2}\text{sen}\alpha$ | <br>$d_1$ y $d_2$: longitudes de las diagonales del $\measuredangle$ABCD.<br>α y θ: medida de los ángulos determinados por las diagonales del $\measuredangle$ABCD.<br>Entonces:<br>$A_{\measuredangle ABCD}=\frac{d_1\,d_2}{2}\text{sen}\alpha$ |



**Observación**

En la figura: $\alpha+\theta=180°$
Entonces, se cumple:
$\text{sen}\alpha=\text{sen}\theta$

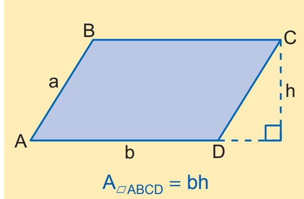
### Otras fórmulas para calcular el área de regiones cuadrangulares

| Región trapecial | Región rombal |
|---|---|
| <br>$A_{\square ABCD}=\left(\frac{a+b}{2}\right)h$ | <br>$A_{\diamond ABCD}=\frac{d_1\,d_2}{2}$ |
| **Cuadrilátero circunscrito** | **Cuadrilátero inscrito o inscriptible** |
| B, b, C, a, r, c, A, d, D<br>$A_{\square ABCD}=pr$ | <br>$A_{\square ABCD}=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$ |
| **Cuadrilátero inscrito y circunscrito** | **Cuadrilátero exinscrito** |
| B, b, C, a, c, A, d, D<br>$A_{\square ABCD}=\sqrt{abcd}$ | <br>$A_{\square ABCD}=(a-c)r_a=(d-b)r_a$ |



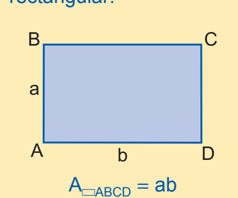
**Recuerda**

- Sea ABCD es una región paralelográmica:



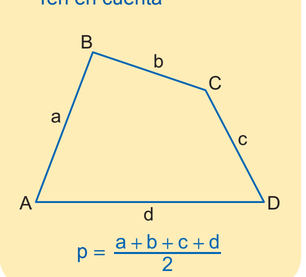

$A_{\square ABCD}=bh$

- Sea ABCD es una región rectangular:




$A_{\square ABCD}=ab$

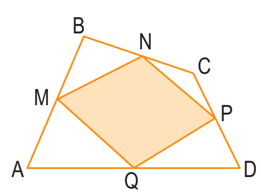
- Ten en cuenta




$p=\frac{a+b+c+d}{2}$

## RELACIÓN DE ÁREAS DE REGIONES CUADRANGULARES

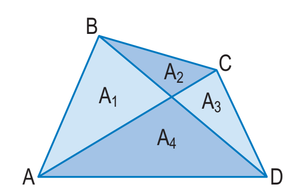
1. En el ▱ABCD, M, N, P y Q son puntos medios de $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ y $\overline{DA}$, respectivamente. Se cumple:




$$A_{▱MNPQ} = \frac{A_{▱ABCD}}{2}$$

Además, ▱MNPQ es un paralelogramo

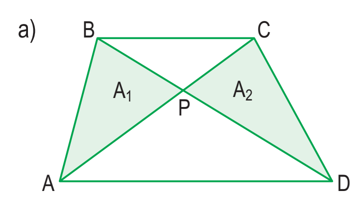
2. En el cuadrilátero ABCD, se cumple:




$$A_1A_3 = A_2A_4$$

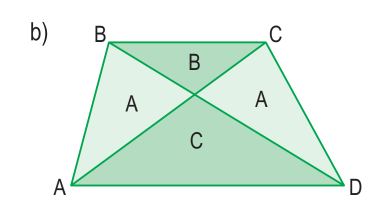
3. En una región trapecial, se cumple:

a)




$$A_1 = A_2$$

b)

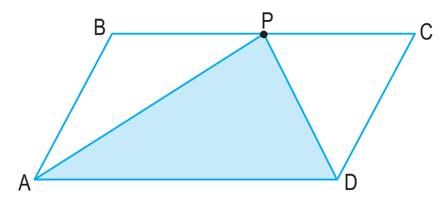



$$A = \sqrt{BC}$$

También se cumple:

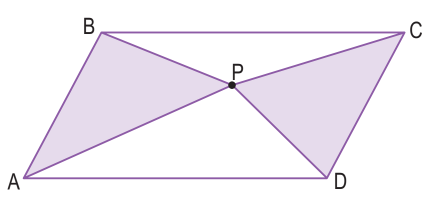
$$A_{▱ABCD} = (\sqrt{B} + \sqrt{C})^2$$

4. En la región paralelográmica ABCD, P es un punto de $\overline{BC}$, se cumple:



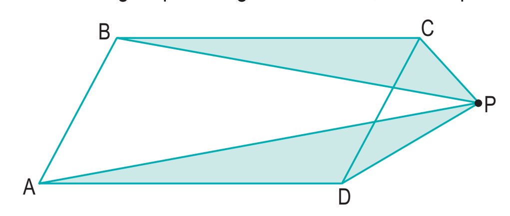

$$A_{\Delta APD} = \frac{A_{▱ABCD}}{2}$$

5. En la región paralelogramica ABCD, P es un punto interior, se cumple:




$$A_{\Delta ABP} + A_{\Delta CPD} = \frac{A_{▱ABCD}}{2}$$

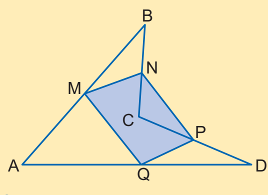
6. En la región paralelogramica ABCD, P es un punto exterior, se cumple:




$$A_{\Delta BPC} + A_{\Delta APD} = \frac{A_{▱ABCD}}{2}$$

**Observación**

En el cuadrilátero no convexo ABCD, M; N; P y Q son los puntos medios de $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ y $\overline{DA}$, respectivamente.



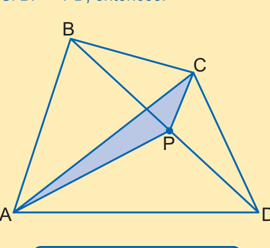

Se cumple:

$$A_{▱MNPQ} = \frac{A_{ABCD}}{2}$$

Además ▱MNPQ es un paralelogramo.

**Teorema 1**

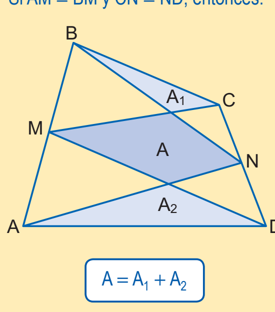
Si BP = PD, entonces:




$$A_{\Delta APC} = A_{APCD} - A_{\Delta ABC}$$

**Teorema 2**

Si AM = BM y CN = ND, entonces:



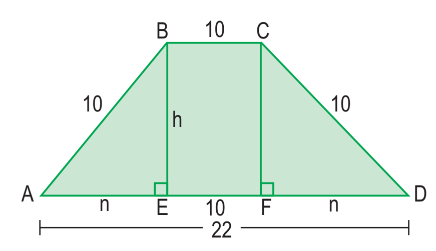

$$A = A_1 + A_2$$



# Problemas resueltos

**1** Los lados no paralelos y la base menor de un trapecio isósceles son congruentes entre sí y miden 10 m. Si la base mayor mide 22 m, el área de la región trapecial es:

**Resolución:**




Nos piden: $A_{\square ABCD}$

Según el gráfico: $n = 6$

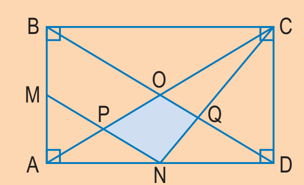
Luego: $h^2 = 10^2 - n^2 = 10^2 - 6^2$

$h = 8$

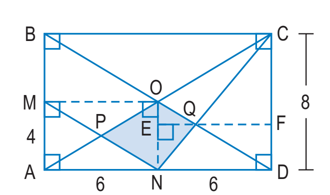
$A_{\square ABCD} = \left(\dfrac{10 + 22}{2}\right)8$

$\therefore\ A_{\square ABCD} = 128\ m^2$

**2** En la figura M y N son puntos medios de $\overline{AB}$ y $\overline{AD}$, respectivamente. Los lados del rectángulo ABCD miden: AB = 8 cm y AD = 12 cm. Halla el área de la región cuadrangular NPOQ.




**Resolución:**




Piden: $A_{\square NPOQ}$

Del gráfico: $A_{\square NPOQ} = A_{\Delta NOQ} + A_{\Delta NPO}$ ...(1)

Siendo: $A_{\Delta NPO} = \dfrac{A_{\square AMON}}{4} = \dfrac{6(4)}{4} \Rightarrow A_{\Delta NPO} = 6\ cm^2$ ...(2)

Para el $A_{\Delta NOQ}$, debemos hallar previamente EQ.

De la semejanza de los triángulos NOQ y CQD:

$$\frac{EQ}{QF} = \frac{ON}{DC} \Rightarrow \frac{EQ}{6 - EQ} = \frac{4}{8} \Rightarrow EQ = 2$$

Luego: $A_{\Delta NOQ} = \dfrac{(ON)(EQ)}{2} = \dfrac{4(2)}{2} \Rightarrow A_{\Delta NOQ} = 4\ cm^2$ ...(3)

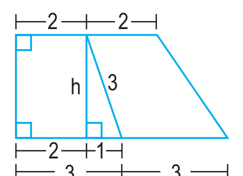
Finalmente, con (2) y (3) en (1):

$A_{\square NPOQ} = 6\ cm^2 + 4\ cm^2$

$\therefore\ A_{\square NPOQ} = 10\ cm^2$

**3** Un trapecio rectángulo tiene bases de 6 y 4 cm. Si el segmento que une los puntos medios de las bases mide 3 cm, ¿cuál es el área del trapecio?

**Resolución:**

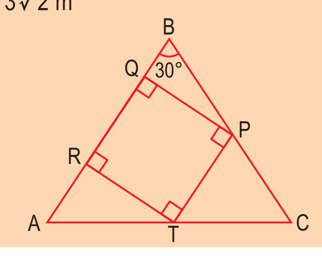



$h^2 + 1^2 = 3^2$

$h = 2\sqrt{2}\ cm$

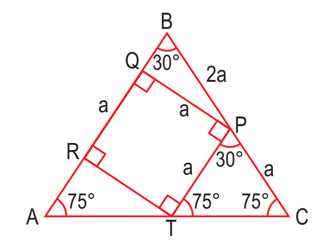
$\Rightarrow S_{\triangle} = \left(\dfrac{6 + 4}{2}\right)2\sqrt{2} = 10\sqrt{2}\ cm^2$

**4** Calcula el área de la región cuadrada RTPQ, si $AB = BC = 3\sqrt{2}$ m




**Resolución:**

Piden: área de la región cuadrada RTPQ.




En el ⊿PQB notable de 30° y 60°

Si PQ = a, entonces BP = 2a

En el △TPC isósceles:

PT = PC = a

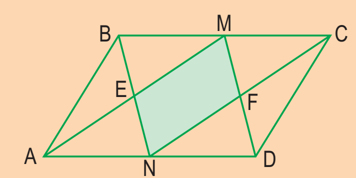
Luego: $BC = 3a = 3\sqrt{2}$

$\Rightarrow a = \sqrt{2}$ m

Entonces:

$A_{\square RTPQ} = (\sqrt{2})^2 = 2\ m^2$

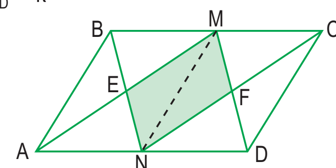
**5** Del gráfico, calcula el área de la región sombreada, si el área de la región paralelográmica ABCD es k, M y N son puntos medios.



**Resolución:**

Piden: $A_{\square EMFN}$

Datos: $A_{\square ABCD} = k$




Del gráfico: EMFN es un paralelogramo.

Donde: $A_{\square ABMN} = \dfrac{A_{\square ABCD}}{2}$

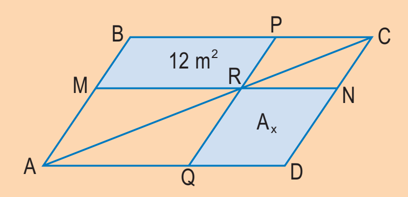
$A_{\square ABMN} = \dfrac{k}{2}$

Además: $A_{\Delta NEM} = \dfrac{A_{\square ABMN}}{4} = \dfrac{k}{8}$

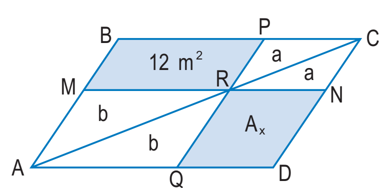
Finalmente: $A_{\square EMFN} = 2A_{\Delta NEM}$

$\therefore\ A_{\square EMFN} = \dfrac{k}{4}$

**6** Siendo ABCD un paralelogramo, calcula el área de la región QRND, si $\overline{MN}$ // $\overline{BC}$ y $\overline{PQ}$ // $\overline{AB}$.



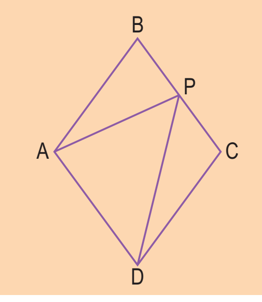

**Resolución:**




Por propiedad: $a + b + 12 = a + b + A_x$

$\Rightarrow A_x = 12\ m^2$

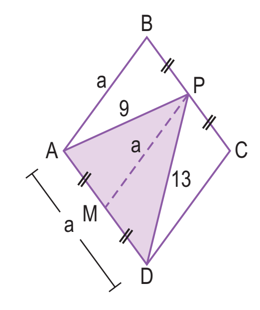
**7** En la figura, ABCD es un rombo, P punto medio de $\overline{BC}$, AP = 9 m y DP = 13 m. Halla el área de la región rombal.




**Resolución:**

Nos piden: $A_{\diamond ABCD}$

Sabemos que: $A_{\diamond ABCD} = 2(A_{\Delta APD})$ ...(1)




En el $\Delta$APD, trazamos la mediana PM.

Luego $\overline{PM}$ // $\overline{AB}$ y PM = AB = AD = a.

Por el teorema de la mediana en dicho triángulo:

$2a^2 + \dfrac{a^2}{2} = 9^2 + 13^2 \Rightarrow a = 10$

Por el teorema de Herón para el $A_{\Delta APD}$, hallamos previamente:

$p = \dfrac{9 + 13 + 10}{2} = 16$

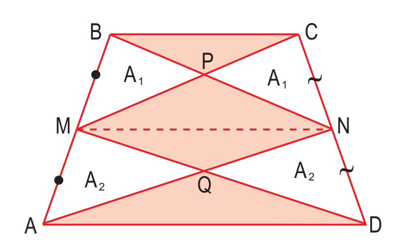
Entonces: $A_{\Delta APD} = \sqrt{16(16-9)(16-13)(16-10)}$

$A_{\Delta APD} = 12\sqrt{14}\ cm^2$

Sustituyendo en (1): $A_{\diamond ABCD} = 24\sqrt{14}\ cm^2$

**8** En un trapecio ABCD, de bases $\overline{BC}$ y $\overline{AD}$, (BC < AD), se toman M y N puntos medios de $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$, respectivamente, $\overline{MC}$ y $\overline{NB}$ se cortan en P, $\overline{MD}$ y $\overline{AN}$ se intersecan en Q. Si: $A_{\Delta BPC} = 10\ cm^2$ y $A_{\Delta AQD} = 14\ cm^2$. Halla: $A_{\square MPNQ}$

**Resolución:**




Piden: $A_{\square MPNQ}$

Al trazar $\overline{MN}$, en el trapecio MBCN.

Sabemos que: $A_{\Delta MBP} = A_{\Delta NCP} = A_1$

En el trapecio AMND:

$A_{\Delta AMQ} = A_{\Delta NQD} = A_2$

Además, para el trapecio ABCD: $2(A_{\Delta CMD}) = A_{\square ABCD}$

Con el gráfico:

$2(A_1 + A_2 + A_{\square MPNQ}) = 2A_1 + 2A_2 + A_{\Delta BPC} + A_{\square MPNQ} + A_{\Delta AQD}$

De donde, al cancelar $A_1$ y $A_2$:

$A_{\square MPNQ} = A_{\Delta BPC} + A_{\Delta AQD}$

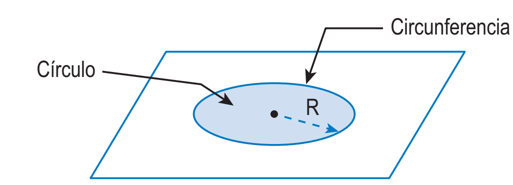
$\therefore\ A_{\square MPNQ} = 24\ cm^2$

# ÁREAS DE REGIONES CIRCULARES



## CÍRCULO

El círculo es una región cuyo contorno es una circunferencia y su área es igual al producto del número pi ($\pi$) por el cuadrado del radio de dicho círculo.

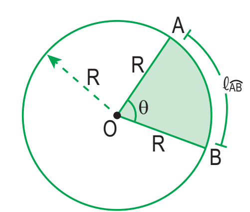



$$A_{\bigcirc} = \pi R^2$$

Donde: $\pi = 3,141516...$

## SECTOR CIRCULAR

Es aquella porción del círculo comprendido por el ángulo central y el arco correspondiente. Su área es igual al semiproducto de la longitud del arco del sector y el radio de ella.

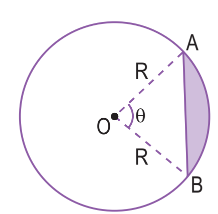



$$A_{\triangleleft AOB} = \frac{\ell_{\overparen{AB}} R}{2} = \frac{\theta \pi R^2}{360°}$$

Donde: $\ell_{\overparen{AB}}$ es la longitud del arco AB.

## SEGMENTO CIRCULAR

Es aquella porción del círculo limitado por una cuerda y su correspondiente arco.

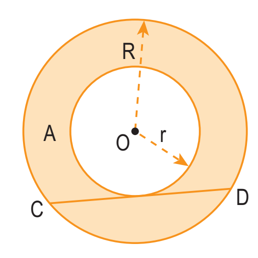



$$A_{\overparen{AB}} = \frac{\theta \pi R^2}{360°} - \frac{R^2 \operatorname{sen}\theta}{2}$$

Donde: $0 < \theta < 180°$.

## CORONA CIRCULAR

Es aquella porción de círculo, limitada por dos circunferencias concéntricas.

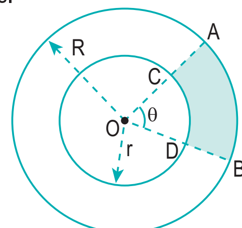



$$A = \pi R^2 - \pi r^2 \quad \text{ó} \quad A = \frac{\pi (CD)^2}{4}$$

Donde:
r es radio del círculo menor.
R es radio del círculo mayor.

## TRAPECIO CIRCULAR

Es aquella porción de una corona circular limitada por dos segmentos de radio de dichas circunferencias concéntricas y dos arcos.



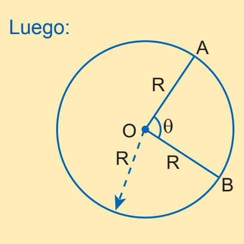

$$A_{CABD} = \frac{\theta \pi}{360°}(R^2 - r^2)$$

Donde:
r y R son radios de las circunferencias concentricas

**Observación**

Para hallar la longitud de arco de un sector circular, el ángulo central correspondiente a este sector debe estar expresado en radianes, entonces:

Luego:

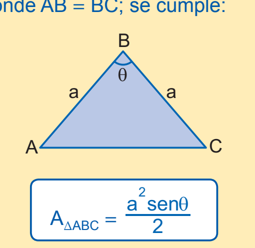



$$\ell_{\overparen{AB}} = \left(\frac{\theta \pi \text{ rad}}{180°}\right) R$$



**Recuerda**

En una región triangular ABC, donde AB = BC; se cumple:

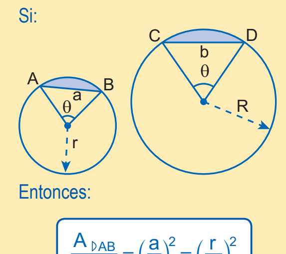



$$A_{\Delta ABC} = \frac{a^2 \operatorname{sen}\theta}{2}$$



**Atención**

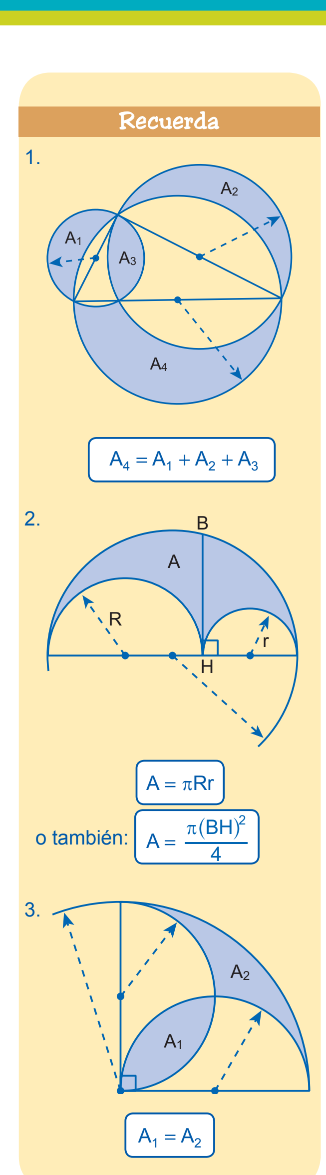
Si:




Entonces:

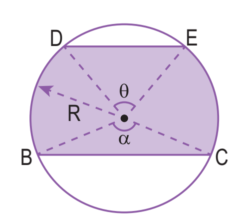
$$\frac{A_{\overparen{AB}}}{A_{\overparen{CD}}} = \left(\frac{a}{b}\right)^2 = \left(\frac{r}{R}\right)^2$$





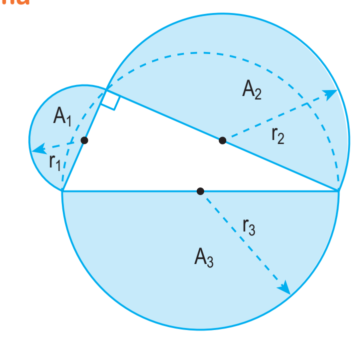

## FAJA CIRCULAR

Es aquella porción de círculo limitada por dos cuerdas paralelas y los arcos entre dichas cuerdas.




$$A_{\square BDEC} = R^2\left[\pi - \frac{\pi}{360^\circ}(\theta + \alpha) + \frac{1}{2}(\text{sen}\theta + \text{sen}\alpha)\right]$$

### Teorema



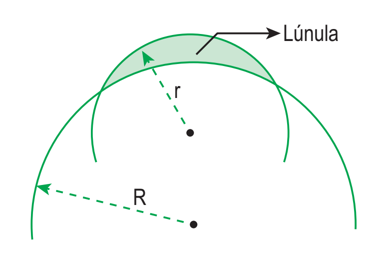

Se cumple:

$$A_3 = A_1 + A_2$$

$$\frac{A_1}{r_1^2} = \frac{A_2}{r_2^2} = \frac{A_3}{r_3^2}$$

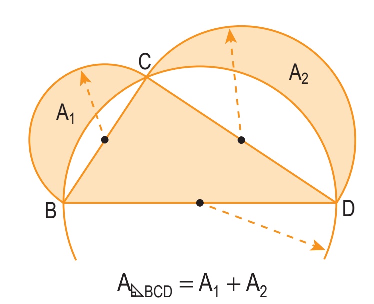
## LÚNULA

Es una región no convexa limitada por dos arcos de circunferencias secantes de diferentes centros.



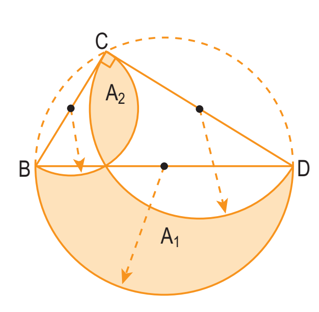

### Lúnulas de hipócrates

**1.**



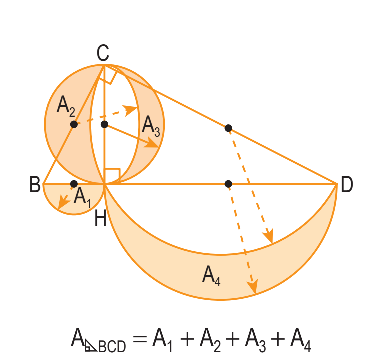

$A_{\triangle BCD} = A_1 + A_2$

**2.**



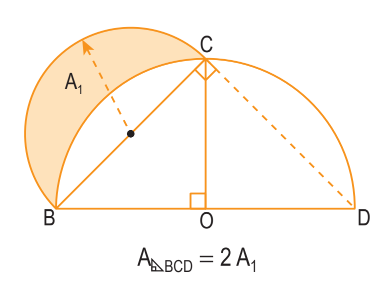

$A_{\triangle BCD} = A_1 - A_2$

**3.**




$A_{\triangle BCD} = A_1 + A_2 + A_3 + A_4$

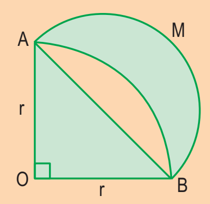
**4.**



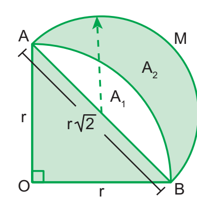

$A_{\triangle BCD} = 2A_1$

# Problemas resueltos

**1** En la figura adjunta se tiene un cuarto de círculo con centro O y un semicírculo de diámetro AB. Demuestra que las regiones triangular AOB y lunular AMB, son equivalentes.




**Resolución:**




$A_1 + A_2 = \pi\left(\frac{r\sqrt{2}}{2}\right)^2 \frac{1}{2}$

$A_1 + A_2 = \frac{\pi r^2}{4}$

Del gráfico:

$A_{\triangle AOB} + A_1 = A_{\triangle AOB}$

$\frac{r^2}{2} + A_1 = \frac{\pi r^2}{4}$

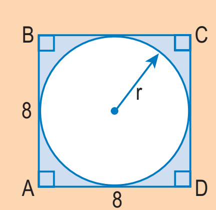
$\Rightarrow A_1 = \frac{\pi r^2}{4} - \frac{r^2}{2}$

$\left(\frac{\pi r^2}{4} - \frac{r^2}{2}\right) + A_2 = \frac{\pi r^2}{4}$

$\Rightarrow A_2 = \frac{r^2}{2} = A_{\triangle AOB}$

... l.q.q.d.

**2** Calcula el área de la región sombreada.




**Resolución:**

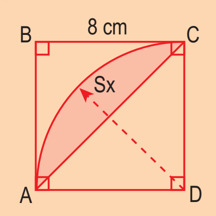
$S = S_{\square ABCD} - S_{\bigcirc}$

$S = (8)^2 - \pi(4)^2$

$S = 64 - 16\pi$

$\therefore \quad S = 16(4 - \pi)$

**3** Halla el área de la región sombreada.



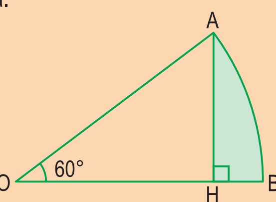

**Resolución:**

$S_x = S_{\triangle ACD} - S_{\triangle ADC}$

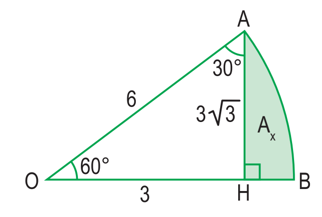
Piden: $S_{\triangle ACD} = \frac{\pi(8)^2}{4}$ y $S_{\triangle ADC} = \frac{8(8)}{2} = 32$

$\Rightarrow S_x = 16\pi - 32 = 16(\pi - 2)\ cm^2$

**4** En la figura mostrada, AO = OB = 6 m. Calcula el área de la región sombreada.




**Resolución:**




Piden: $A_x = A_{\triangleleft} - A_{\triangle}$

Por dato: $R = 6$ m

Entonces: $A_{\triangleleft} = \frac{\pi 6^2 (60°)}{360°}$

$A_{\triangleleft} = 6\pi\ m^2$

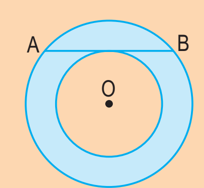
Además:

$A_{\triangle} = \frac{(OH)(AH)}{2}$

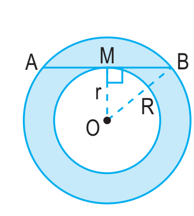
$A_{\triangle} = \frac{(3\sqrt{3})(3)}{2} = 4{,}5\sqrt{3}\ m^2$

Finalmente: $A_x = (6\pi - 4{,}5\sqrt{3})\ m^2$

**5** La figura muestra dos circunferencias de centro O. $\overline{AB}$ es una cuerda de la mayor, tangente a la menor. Halla el área de la corona en función de AB.




**Resolución:**




Se tiene:

$A_{corona} = \pi(R^2 - r^2)$ ...(1)

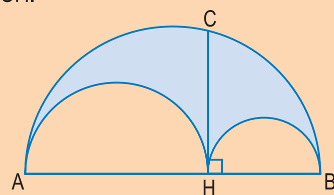
En el $\triangle$OMB: $R^2 - r^2 = MB^2$

Siendo: $MB = \frac{AB}{2}$

$\Rightarrow R^2 - r^2 = \frac{AB^2}{4}$ ...(2)

Sustituyendo (2) en (1): $A_{corona} = \frac{\pi}{4}AB^2$

**6** En la figura adjunta, $\overline{AH}$, $\overline{HB}$ y $\overline{AB}$ son diámetros y $\overline{CH}$ es perpendicular a $\overline{AB}$. Halla el área de la región sombreada en función de CH.



**Resolución:**

Por diferencia, el área A será:

$A = A_{\frown AB} - A_{\frown AH} - A_{\frown HB}$

Expresamos la áreas semicirculares en función de los diámetros $\overline{AH}$, $\overline{HB}$ y $\overline{AB}$, donde: $AB = AH + HB$

$A = \frac{\pi AB^2}{8} - \frac{\pi AH^2}{8} - \frac{\pi HB^2}{8}$

$A = \frac{\pi}{8}[AB^2 - (AH^2 + HB^2)]$

$A = \frac{\pi}{8}[(AH + HB)^2 - (AH^2 + HB^2)]$

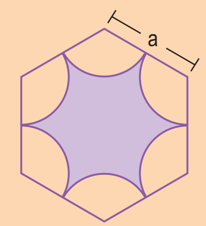
De donde: $A = \frac{\pi}{4}(AH)(HB)$ ...(1)

Además por relaciones métricas sabemos que:

$(AH)(HB) = CH^2$ ...(2)

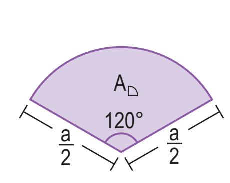
Reemplazando (2) en (1): $A = \frac{\pi}{4}CH^2$

**7** Los vértices de un hexágono regular son los centros de seis circunferencias iguales y tangentes (según muestra la figura). Hallar el área de la región sombreada en función del lado a del hexágono.




**Resolución:**

El área de la región sombreada es igual a la del hexágono, menos los seis sectores. Cada sector tiene radio a/2 y ángulo central 120°. El área de cada sector es:




$A_{\triangleleft} = \frac{120°\pi}{360°}\left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{\pi a^2}{12}$

Luego:

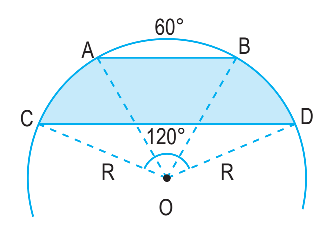
$A_{sombreada} = A_{hexágono} - 6A_{\triangleleft}$

$A_{sombreada} = \frac{3}{2}a^2\sqrt{3} - 6\left(\frac{\pi a^2}{12}\right)$

$A_{sombreada} = \frac{a^2}{2}(3\sqrt{3} - \pi)$

**8** Halla el área de una zona del círculo de radio R, sabiendo que las bases son los lados del triángulo equilátero y hexágono regular, inscritos, situados a un mismo lado del centro.

**Resolución:**




Sea: $AB = \ell_6$ y $CD = \ell_3 \Rightarrow \overset{\frown}{AB} = 60°$ y $\overset{\frown}{CD} = 120°$

Luego:

$A_{zona} = A_{sector\ COD} - A_{segmento\ AB} - A_{triángulo\ COD}$ ...(1)

Siendo:

$A_{sector\ COD} = \frac{120°\pi R^2}{360°} = \frac{\pi R^2}{3}$

$A_{segmento\ AB} = A_{sector\ AOB} - A_{triángulo\ AOB}$

$= \frac{60°\pi R^2}{360°} - \frac{R^2\sqrt{3}}{4} = \frac{\pi R^2}{6} - \frac{R^2\sqrt{3}}{4}$

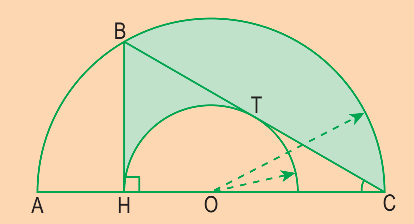
$A_{triángulo\ COD} = \frac{RR}{6}\operatorname{sen}120° = \frac{R^2\sqrt{3}}{4}$

Al sustituir en (1):

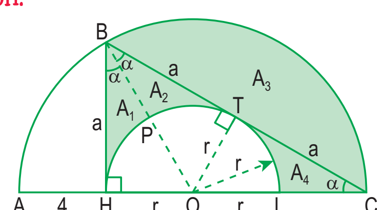
$A_{zona} = \frac{\pi R^2}{3} - \left(\frac{\pi R^2}{6} - \frac{R^2\sqrt{3}}{4}\right) - \frac{R^2\sqrt{3}}{4}$

$\therefore A_{zona} = \frac{\pi R^2}{6}$

**9** Calcula el área de la región sombreada si AH = 4 y T es punto de tangencia.




**Resolución:**




H y T son puntos tangencia:

$\overline{BO}$; bisectriz del $\angle$ TBH $\Rightarrow$ BH = BT

$\overline{OT} \perp \overline{BC} \Rightarrow$ BT = TC

$\therefore$ En el $\Delta$HBC (Triangulo notable)

$2\alpha + \alpha = 90 \Rightarrow \alpha = 30°$

En el ⊿OTC:

$OC = 2(OT) \Rightarrow OC = 2r$ y $LC = r$

$\therefore$ Si $AO = OC \Rightarrow 4 + r = r + r \Rightarrow r = 4$

Por congruencia:

$A_{\Delta HBP} = A_{\Delta PBT} = A_{\Delta TCL}$

$\Rightarrow A_1 = A_2 = A_4$

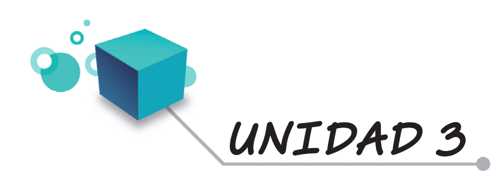
$\therefore$ Trasladamos $A_1$ hacia $A_4$

La nueva área sombreada será:

$A_{sombreada} = A_{Trapecio\ circular\ BPCL}$

$A_{sombreada} = \frac{1}{3}\pi((2r)^2 - r^2) = \pi r^2$

$\therefore A_{sombreada} = 16\pi$



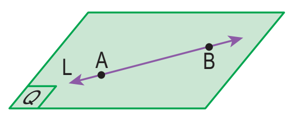





# RECTAS Y PLANOS EN EL ESPACIO

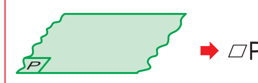
## PLANOS

La idea de plano es el de una superficie plana e ilimitada. Generalmente un plano en el espacio se representa por medio de un paralelogramo y se denota con una sola letra.




**Notación:** ▱Q
(se lee plano Q)

También se puede representar:



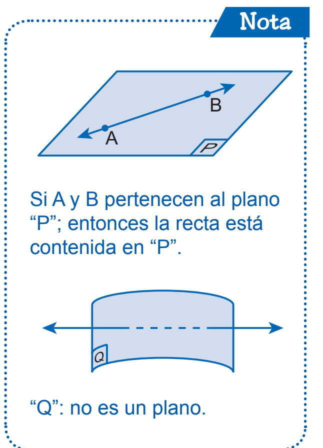




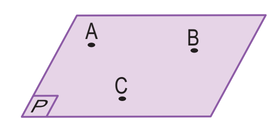
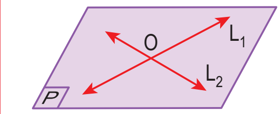
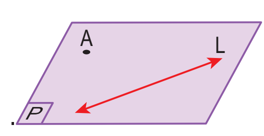
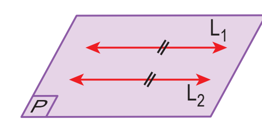



➡ ▱Q

**Nota**



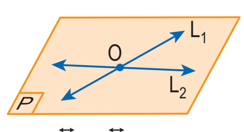

### Postulados para determinar un plano

| | |
|---|---|
| • Tres puntos no colineales determinan un plano.   $\{A; B; C\} \subset$ ▱P | • Dos rectas que se intersecan determinan un plano.   $\overleftrightarrow{L_1} \cap \overleftrightarrow{L_2} = \{O\}$ <br> $\{\overleftrightarrow{L_1}; \overleftrightarrow{L_2}\} \subset$ ▱P |
| • Una recta y un punto exterior a ella determinan un plano.   $A \in$ ▱P $\wedge\ \overleftrightarrow{L} \subset$ ▱P | • Dos rectas paralelas determinan un plano.   $\overleftrightarrow{L_1} \parallel \overleftrightarrow{L_2}$ <br> $\{\overleftrightarrow{L_1}; \overleftrightarrow{L_2}\} \subset$ ▱P |

## POSICIONES RELATIVAS ENTRE RECTAS Y PLANOS EN EL ESPACIO

### 1. Entre rectas

Rectas secantes

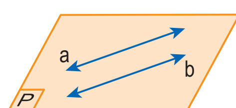



$\overleftrightarrow{L_1} \cap \overleftrightarrow{L_2} = \{O\}$

$\overleftrightarrow{L_1}$ y $\overleftrightarrow{L_2}$ son rectas secantes

$\{\overleftrightarrow{L_1}; \overleftrightarrow{L_2}\} \subset$ ▱P

Rectas paralelas

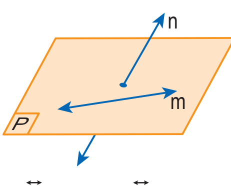



$\overleftrightarrow{a} \parallel \overleftrightarrow{b}$

$\overleftrightarrow{a} \cap \overleftrightarrow{b} = \varnothing$

$\{\overleftrightarrow{a}; \overleftrightarrow{b}\} \subset$ ▱P

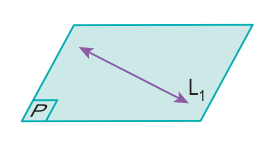
Rectas alabeadas




$\overleftrightarrow{m} \subset$ ▱P $\wedge\ \overleftrightarrow{n} \not\subset$ ▱P

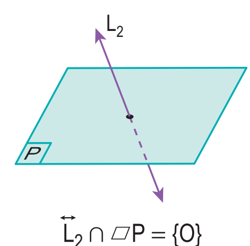
### 2. Entre recta y plano

Recta contenida en el plano



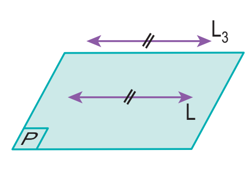

$\overleftrightarrow{L_1} \subset$ ▱P

Recta secante al plano




$\overleftrightarrow{L_2} \cap$ ▱P $= \{O\}$

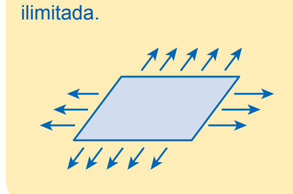
Recta paralela al plano




$\overleftrightarrow{L_3} \cap$ ▱P $= \varnothing$; $\overleftrightarrow{L} \parallel \overleftrightarrow{L_3}$

**Recuerda**

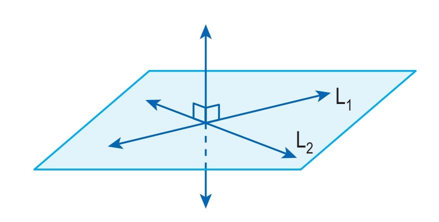
La extensión del plano es ilimitada.

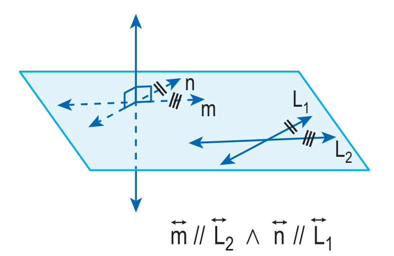




## Rectas y planos perpendiculares

Una recta es perpendicular a un plano si es perpendicular a toda recta contenida en el plano.




$\overleftrightarrow{m} \parallel \overleftrightarrow{L_2} \wedge \overleftrightarrow{n} \parallel \overleftrightarrow{L_1}$

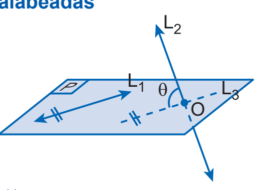
**Criterio:**

Si una recta es perpendicular a dos rectas secantes contenidas en un plano, dicha recta es perpendicular al plano.



**Nota**

**Ángulos entre rectas alabeadas**

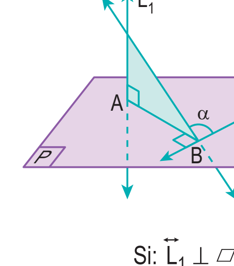



$\overleftrightarrow{L_2} \cap \square P = \{O\}$

Para hallar el ángulo entre las rectas ($\overleftrightarrow{L_1}$ y $\overleftrightarrow{L_2}$) alabeadas Trazamos por "O" una recta paralela a $\overleftrightarrow{L_1}$ ($\overleftrightarrow{L_3}$).

θ: medida del ángulo entre $\overleftrightarrow{L_1}$ y $\overleftrightarrow{L_2}$

### Teorema de las tres perpendiculares

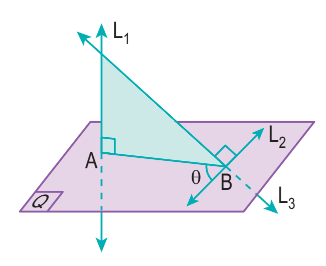



Si: $\overleftrightarrow{L_1} \perp \square P$

$\overline{AB} \perp \overleftrightarrow{L_2}$

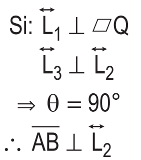
$\Rightarrow \alpha = 90°$

$\therefore \overleftrightarrow{L_2} \perp \overleftrightarrow{L_3}$



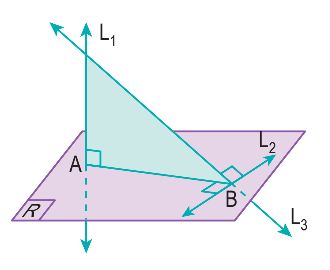

Si: $\overleftrightarrow{L_1} \perp \square Q$

$\overleftrightarrow{L_3} \perp \overleftrightarrow{L_2}$



$\Rightarrow \theta = 90°$

$\therefore \overline{AB} \perp \overleftrightarrow{L_2}$




Si: $\overleftrightarrow{L_3} \perp \overleftrightarrow{L_2}$

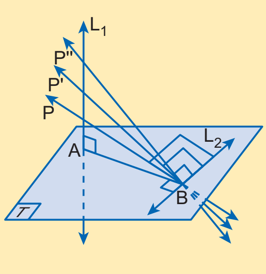
$\overline{AB} \perp \overleftrightarrow{L_2}$

$\overleftrightarrow{L_1} \perp \overline{AB}$

$\Rightarrow \overleftrightarrow{L_1} \perp \square R$



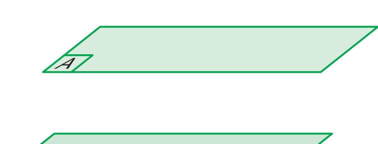
**Observación**



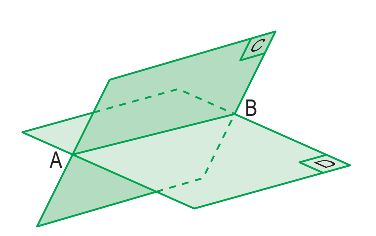

Si $\overleftrightarrow{L_1} \perp T$ y $\overline{AB} \perp \overleftrightarrow{L_2}$

Cada recta que pase por B y un punto de $\overleftrightarrow{L_1}$(P; P'; P", ...) es perpendicular con $\overleftrightarrow{L_2}$.

## 3. Entre planos



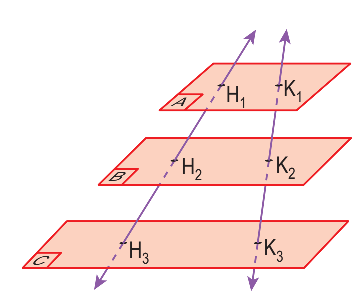

Planos paralelos




Planos secantes

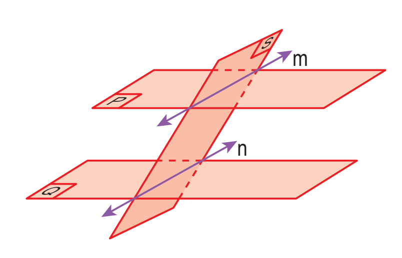
### Teoremas en los planos paralelos

- Teorema de Thales




$$\frac{H_1H_2}{H_2H_3} = \frac{K_1K_2}{K_2K_3}$$

- Teorema de las paralelas




$\square P \parallel \square Q$; $\overrightarrow{m} = \square S \cap \square P$; $\overrightarrow{n} = \square S \cap \square Q$

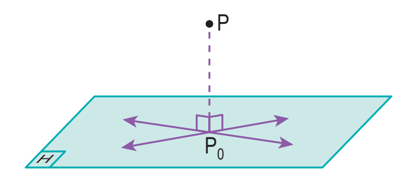
$\overrightarrow{m} \parallel \overrightarrow{n}$



## PROYECCIONES EN EL ESPACIO

### 1. Proyección ortogonal de un punto sobre el plano

Es el pie de la perpendicular trazada desde un punto al plano.



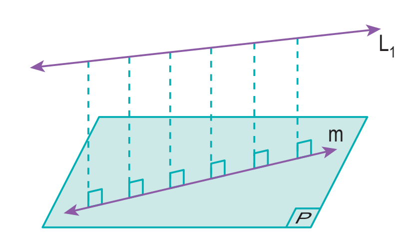

$\overline{PP_0}$: proyectante
$P_0$: proyección de P sobre el plano H
H: plano de proyección

**Nota**

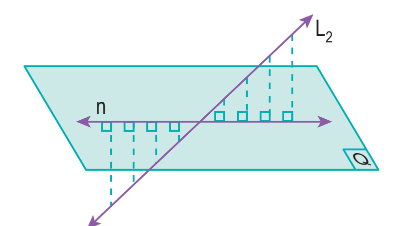
Un **semiplano** es cada una de las partes en que queda dividido un plano por una de sus rectas.

### 2. Proyección ortogonal de una recta sobre el plano

Es el conjunto de puntos de las proyecciones ortogonales de todos los puntos de la recta sobre cierto plano de proyección.




$\overleftrightarrow{m}$: proyección de $\overleftrightarrow{L_1}$ sobre ▱P




$\overleftrightarrow{n}$: proyección de $\overleftrightarrow{L_2}$ sobre ▱Q

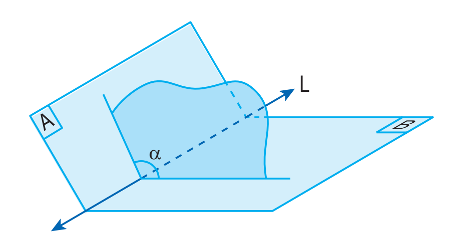
**Observación**

- Si $0 < \alpha < 90°$: El ángulo diedro es agudo
- Si $90° < \alpha < 180°$: El ángulo diedro es obtuso
- Si $\alpha = 90°$: El ángulo diedro es recto



## ÁNGULO DIEDRO

Es la figura formada por dos semiplanos que tienen en común una recta llamada arista.

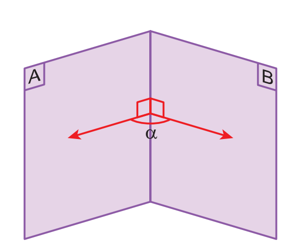



**Elementos:**
- Caras: A y B
- Arista: $\overleftrightarrow{L}$

**Notación:**
Ángulo diedro A - $\overleftrightarrow{L}$ - B

**Medida del ángulo diedro**

Es la medida del ángulo formado por dos rayos perpendiculares a la arista en uno de sus puntos; cada uno de los rayos contenidos en planos diferentes.

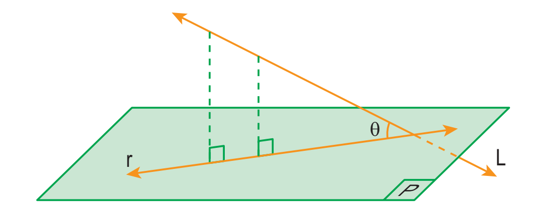



$\alpha$: medida del ángulo diedro

$0° < \alpha < 180°$

**Ángulo entre una recta y un plano**

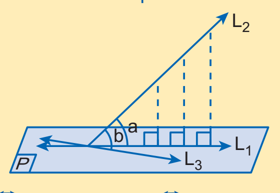
Es aquel ángulo que se forma entre la recta y su proyección sobre dicho plano.




$\overleftrightarrow{r}$: proyección de $\overleftrightarrow{L}$ sobre ▱P
$\theta$: medida del ángulo entre $\overleftrightarrow{L}$ y ▱P

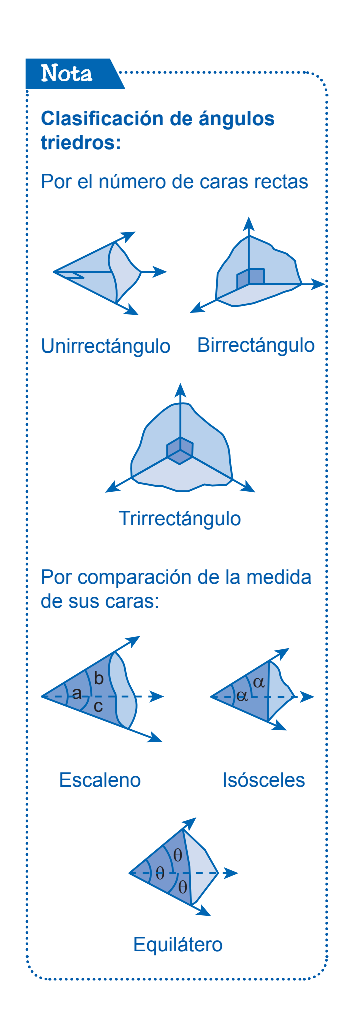
**Observación**

El ángulo entre una recta y un plano es el ángulo de menor medida que puede formar dicha recta con cualquier recta contenida en el plano.



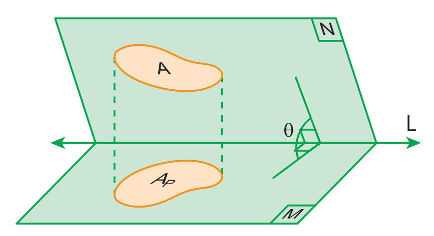

$\overleftrightarrow{L_1}$: proyección de $\overleftrightarrow{L_2}$ sobre ▱P
$\forall\ \overleftrightarrow{L_3} \subset$ ▱P se cumple:

$a \leq b$




### 3) Proyección de regiones planas en el espacio

En general, el área de la proyección de una región plana sobre un plano es igual al producto del área de dicha región y el coseno de la medida del ángulo diedro determinado por el plano de la región y el plano de la proyección.




$A_p = A\cos\theta$

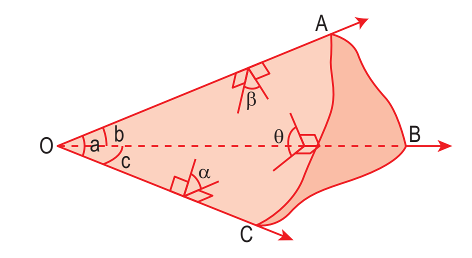
A: área de la región plana

$A_p$: área proyectada sobre ▱M

θ: medida del ángulo diedro M - $\overleftrightarrow{L}$ - N

## ÁNGULO TRIEDRO

Es aquel ángulo poliedro que se determina por tres rayos concurrentes entre sí dos a dos.




**Elementos:**

Medidas de las caras: a, b, c

Medidas de los diedros: $\alpha, \beta, \theta$

**Notación:**

Ángulo triedro O-ABC

### Propiedades de los ángulos triedros

- La suma de los valores de sus caras: $0 < a + b + c < 360°$
- La suma de sus ángulos diedros: $180° < \alpha + \beta + \theta < 540°$
- El valor de una cara es menor que la suma de las otras dos pero mayor que la diferencia de las mismas.

$$b - c < a < b + c$$
$$a - c < b < a + c$$
$$a - b < c < a + b$$

## EFECTUAR

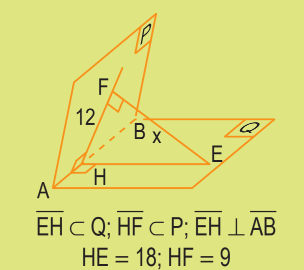


En los siguientes casos calcula el valor de x.

1. $\overline{EH} = 12$; $\overline{EF} \subset P$; $\overline{EF} \perp \overline{AB}$; $\overline{EH} \perp Q$
Medida del diedro: P-AB-Q=60°

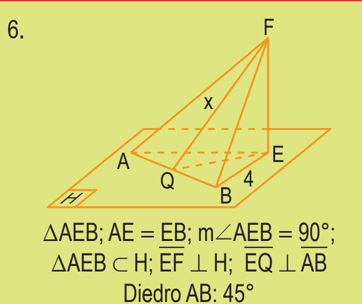
2. $\overline{EF} = 30$; $\overline{EF} \subset P$; $\overline{EF} \perp \overline{AB}$; $\overline{EH} \perp Q$
Medida del diedro: P-AB-Q = 53°

3. $\overline{HE} \perp \overline{AB}$; $\overline{HE} \subset Q$; $\overline{HF} \perp \overline{AB}$; $\overline{EF} \perp P$
Medida del diedro: P-AB-Q = 53°

4. 

$\overline{EH} \subset Q$; $\overline{HF} \subset P$; $\overline{EH} \perp \overline{AB}$
HE = 18; HF = 9

5. Diedro AB: 37°; ΔAQB, equilátero, contenido en H
$\overline{PQ} \perp H$; $\overline{QF} \perp \overline{AB}$
Medida: $8\sqrt{3}$

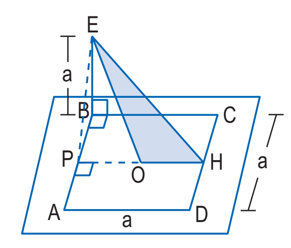
6. 

ΔAEB; AE = EB; m∠AEB = 90°;
ΔAEB ⊂ H; $\overline{EF} \perp H$; $\overline{EQ} \perp \overline{AB}$
Diedro AB: 45°

# Problemas resueltos

**1** Si ABCD es un cuadrado de lado a y por B, se eleva $\overline{BE}$ perpendicular al plano ABCD, tal que BE = a. Si O es centro del cuadrado y H punto medio de $\overline{CD}$, halla el área de la región triangular EOH.

**Resolución:**




Prolongamos $\overline{HO}$ hasta P:

$\overline{HP} \perp \overline{AB}$ y $AP = PB = \frac{a}{2}$

Teorema de las tres perpendiculares:

Si $\overline{EB} \perp \square ABCD$ y $\overline{BP} \perp \overline{PH}$

$\Rightarrow \overline{EP} \perp \overline{PH}$

$\overline{EP}$ es altura del $\triangle$EOH. Luego:

$A_{\triangle EOH} = \frac{1}{2}(OH)(EP) = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{2}\right)(EP)$ ...(1)

En el ⊿EBP: $EP^2 = EB^2 + BP^2 \Rightarrow EP^2 = a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$

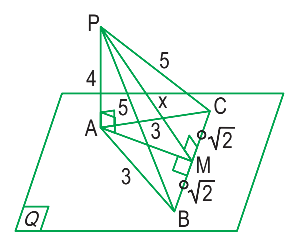
$EP = \frac{a}{2}\sqrt{5}$ ...(2)

Reemplazamos (2) en (1): $A_{\triangle EOH} = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{2}\right)\left(\frac{a}{2}\sqrt{5}\right)$

$\therefore A_{\triangle EOH} = \frac{a^2}{8}\sqrt{5}$

**2** Se tiene el triángulo isósceles ABC (AB = AC) contenido en el plano Q, desde A se levanta $\overline{PA}$ perpendicular al plano Q. Si PA = 4, PC = 5 y $BC = 2\sqrt{2}$. Halla la distancia de P a $\overline{BC}$.

**Resolución:**




Piden: PM = x

Del gráfico: PB = PC = 5

Luego el ⊿PAC es notable 37° y 53°

$\Rightarrow AC = 3$

En el ⊿AMC por teorema de Pitágoras:

$AM = \sqrt{7}$

Ahora como: $\overline{AP} \perp \square Q$ y $\overline{AM} \perp \overline{BC}$

$\Rightarrow$ por el teorema de las tres perpendiculares:

$\overline{PM} \perp \overline{BC}$

Finalmente en el ⊿PMC (Teorema de pitágoras):

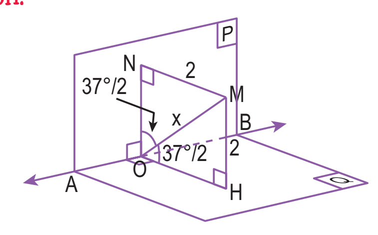
$x^2 + \sqrt{2}^2 = 5^2$

$x^2 = 23$

$\therefore x = \sqrt{23}$

**3** Un ángulo diedro mide 37°. Halla la distancia de un punto M hacia la arista, si M dista 2 a ambas caras.

**Resolución:**




Por el dato la medida del diedro $\overleftrightarrow{AB}$ es 37°

$\Rightarrow m\angle MOH = 37°$

Los triángulos rectángulos ONM y OHM son congruentes (Caso LLA), entonces: $m\angle NOM = m\angle MOH = 37°/2$

Piden la distancia de M a $\overleftrightarrow{AB}$: MO = x

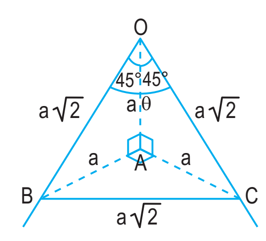
Del ⊿MHO notable de 37°/2:

$MO = (MH)\sqrt{10} = (2)\sqrt{10}$

$\therefore x = 2\sqrt{10}$

**4** En un triedro O - ABC, si los diedros $\overline{AO}$, $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ miden 90° cada uno y las caras b = c = 45°. Entonces la magnitud de la cara restante es:

**Resolución:**




Los triángulos rectángulos OAB, OAC y BAC son notables e isósceles.

Entonces en el ⊿OAB:

Si OA = a $\Rightarrow$ AB = a

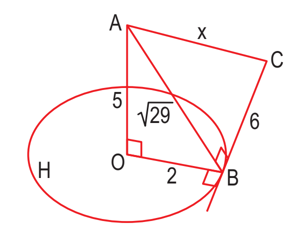
$\therefore OB = a\sqrt{2}$

El mismo análisis se realiza para los ⊿OAC y ⊿BAC.

Por lo tanto: $\theta = 60°$

**5** Una circunferencia de centro O y de radio 2 se encuentra en un plano H. Por O se traza la perpendicular $\overline{OA}$ al plano H tal que OA = 5. Por un punto B de la circunferencia se traza la tangente BC que mide 6. Calcula AC.

**Resolución:**




Por el teorema de las 3 perpendiculares:

$\left.\begin{array}{l}\overline{AO} \perp \square H \\ \overline{OB} \perp \overline{BC}\end{array}\right\} \overline{AB} \perp \overline{BC}$

En el ⊿AOB:

$AB = \sqrt{5^2 + 2^2} = \sqrt{29}$

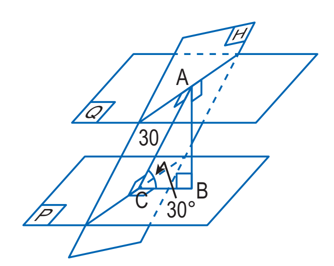
En el ⊿ABC:

$x^2 = 6^2 + (\sqrt{29})^2$

$x = \sqrt{65}$

**6** Un plano H tiene una inclinación de 30° sobre el plano P. ¿A qué distancia del plano P se debe trazar otro plano paralelo que corta a H, tal que sus intersecciones disten 30 m?

**Resolución:**




Por dato, el plano P y el plano Q son paralelos.
Piden la distancia entre los planos P y Q (AB).

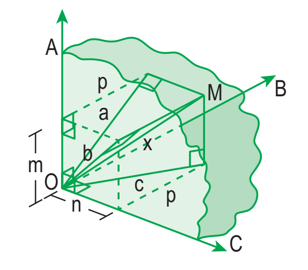
Del gráfico: el ⊿ABC es notable de 30° y 60°.

$\Rightarrow AB = \dfrac{AC}{2} = \dfrac{30}{2}$

$\therefore$ AB = 15 m

**7** En un triedro trirrectángulo O-ABC se ubica un punto "M" interior a dicho ángulo triedro, luego se proyecta el segmento OM sobre las caras del ángulo triedro. Si la suma de los cuadrados de sus respectivas proyecciones es 72, calcula la longitud del $\overline{OM}$.

**Resolución:**




Dato:

$a^2 + b^2 + c^2 = 72$

Del gráfico:

$a^2 = m^2 + p^2$; $b^2 = m^2 + n^2$; $c^2 = n^2 + p^2$

Sumando estas expresiones, se tiene:

$$\begin{aligned} a^2 &= m^2 + p^2 \\ b^2 &= m^2 + n^2 \quad (+) \\ c^2 &= n^2 + p^2 \end{aligned}$$

$$\underbrace{a^2 + b^2 + c^2}_{72} = 2(m^2 + n^2 + p^2)$$

$$72 = 2(m^2 + n^2 + p^2)$$

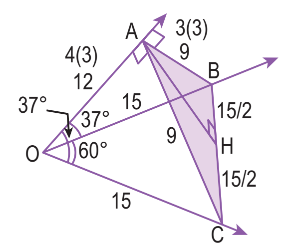
$$36 = \underbrace{m^2 + n^2 + p^2}_{x^2}$$

$$36 = x^2$$

$$6 = x$$

**8** Las caras de un ángulo triedro miden 37°, 37° y 60° se traza un plano secante perpendicular a la arista común de las caras iguales. Si la distancia del vértice al plano es igual a 12. Calcula el área de la sección determinada.

**Resolución:**




Veamos:

Los triángulos OAB y OAC son notables de 37° y 53°

⊿OAB ⇒ AB = 9 y OB = 15

⊿OAC ⇒ AC = 9 y OC = 15

Luego:

BOC: equilátero ⇒ BC = 15

Sea: AH = a

En el ⊿AHB, aplicamos el teorema de Pitágoras:

$$a^2 + \left(\frac{15}{2}\right)^2 = 9^2$$

$$a^2 + \frac{225}{4} = 81 \Rightarrow a = \frac{3\sqrt{11}}{2}$$

Nos piden:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{\frac{3\sqrt{11}}{2}(15)}{2}$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{45\sqrt{11}}{4}$$

# POLIEDROS

## DEFINICIÓN

Es una región del espacio limitada por regiones poligonales planas las cuales se denominan caras del poliedro.

**Elementos**

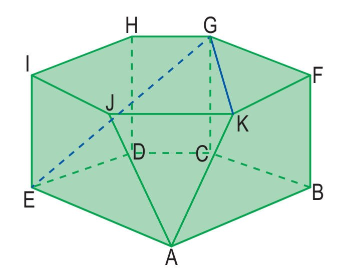
Vértices: A; B; C; D; ...

Aristas: $\overline{AB}$; $\overline{BC}$; $\overline{GF}$; ...

Caras: AJK, ABFK, CDHG; ...

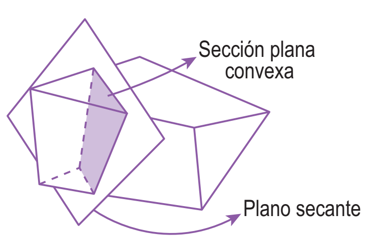
Diagonal de una cara: $\overline{GK}$

Diagonal de poliedro: $\overline{EG}$

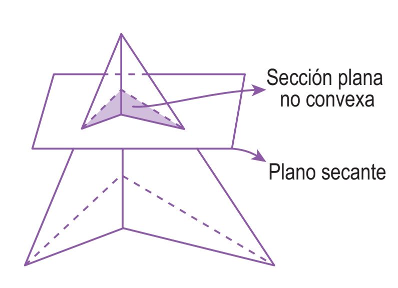



### Poliedro convexo y no convexo (cóncavo)

Un poliedro es convexo cuando todas las secciones planas que se determinan son convexas; por otro lado, un poliedro será no convexo cuando no todas sus secciones planas son convexas.




Poliedro convexo

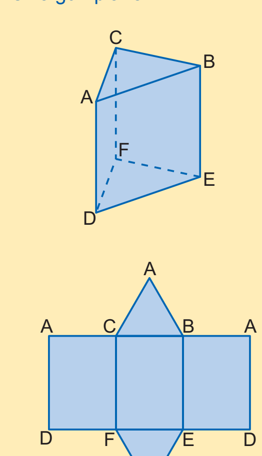



Poliedro no convexo

**Observación**

**Desarrollo de la superficie de un poliedro**

Se denomina **grado** de desarrollo de una superficie poliédrica a la cantidad de "cortes" necesarios y suficientes a través de sus aristas de modo que permitan a dicha superficie se ubique en algún plano.




Desarrollo de grado 5.



## TEOREMAS PARA POLIEDROS

1. En todo poliedro convexo, el número de caras aumentado en el número de vértices es igual al número de aristas más dos. Se conoce como **teorema de Euler.**

$$C + V = A + 2$$

C: n.° de caras
V: n.° de vértices
A: n.° de aristas

2. Para todo poliedro, la suma de las medidas de los ángulos internos de todas sus caras es:

$$S_{m\angle caras} = 360°(V - 2)$$

$S_{m\angle caras}$: suma de medidas de los ángulos internos de todas sus caras

3. En todo poliedro cuyas caras tienen igual número de lados, el número de aristas es igual al semiproducto del número de caras con el número de lados de una cara.

$$A = \frac{Cn}{2}$$

A: n.° de aristas
C: n.° de caras
n: n.° de lados de una cara

4. En todo poliedro, el número de diagonales es igual al valor de la combinación del número de vértices del poliedro tomados de dos en dos, menos el número de aristas y menos la suma de los números de diagonales de todas las caras de dicho poliedro.

$$ND_P = C_2^V - A - ND_{caras}$$

$ND_P$: n.° de diagonales del poliedro
A: n.° de aristas
$ND_{caras}$: suma de los números de diagonales
$C_2^V$: n.° de vértices tomados de dos en dos

**Nota**

El número de vértices tomados de dos en dos es igual a:

$$C_2^V = \frac{V!}{(V-2)!2!}$$

V: número de vértices

5. Si un poliedro presenta $k_1, k_2, k_3, \dots k_i$ caras de $l_1, l_2, l_3; \dots l_i$ lados, respectivamente, entonces el número de aristas será igual a:

$$A = \frac{k_1 l_1 + k_2 l_2 + \dots + k_i l_i}{2}$$

A: números de aristas

## POLIEDROS REGULARES

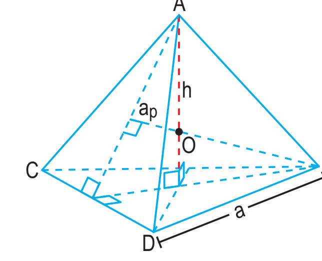
Son poliedros cuyas caras son regiones poligonales regulares congruentes entre sí y que en cada vértice concurren el mismo número de aristas.

**Atención**

El grado de desarrollo del tetraedro regular es tres.

A
C B
A D A

### Tetraedro regular



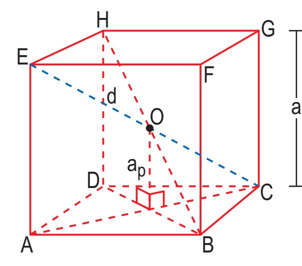

Tetraedro regular A – BCD

n.° caras : 4
n.° aristas : 6
n.° vértices : 4
G : baricentro

Medidas

| Altura (h) | Área total ($A_T$) | Volumen (V) | Apotema ($a_p$) |
|---|---|---|---|
| $h = \frac{a\sqrt{6}}{3}$ | $A_T = a^2\sqrt{3}$ | $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$ | $a_p = \frac{a\sqrt{6}}{12}$ |

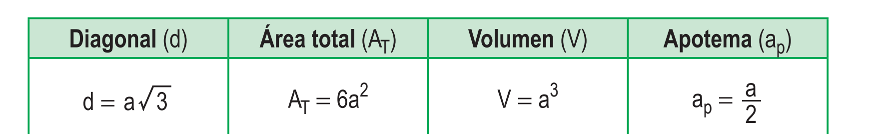
### Hexaedro regular




Hexaedro regular ABCD–EFGH

n.° caras : 6
n.° aristas : 12
n.° vértices : 8

Medidas



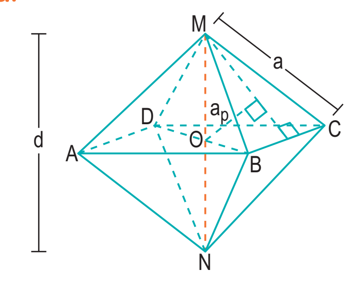
| Diagonal (d) | Área total ($A_T$) | Volumen (V) | Apotema ($a_p$) |
|---|---|---|---|
| $d = a\sqrt{3}$ | $A_T = 6a^2$ | $V = a^3$ | $a_p = \frac{a}{2}$ |

**Recuerda**

Solamente existen 5 poliedros regulares: tetradro regular, hexaedro regular, octaedro regular, docecaedro regular e icosaedro regular.



### Octaedro regular



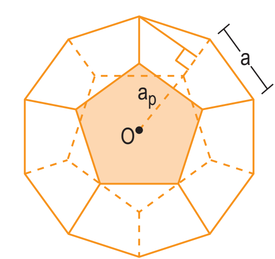

Octaedro regular M – ABCD – N

n.° caras : 8
n.° aristas : 12
n.° vértices : 6

Medidas

| Diagonal (d) | Área total ($A_T$) | Volumen (V) | Apotema ($a_p$) |
|---|---|---|---|
| $d = a\sqrt{2}$ | $A_T = 2a^2\sqrt{3}$ | $V = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{3}$ | $a_p = \dfrac{a\sqrt{6}}{6}$ |

## Dodecaedro regular

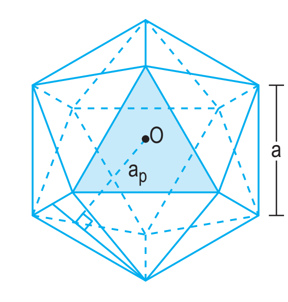



n.° caras: 12
n.° aristas: 30
n.° vértices: 20

Medidas

| Área total ($A_T$) | Volumen (V) | Apotema ($a_p$) |
|---|---|---|
| $A_T = 15a^2\sqrt{\dfrac{5+2\sqrt{5}}{5}}$ | $V = \dfrac{5a^3}{2}\sqrt{\dfrac{47+21\sqrt{5}}{10}}$ | $a_p = \dfrac{a}{2}\sqrt{\dfrac{25+11\sqrt{5}}{10}}$ |

## Icosaedro regular




n.° caras: 20
n.° aristas: 30
n.° vértices: 12

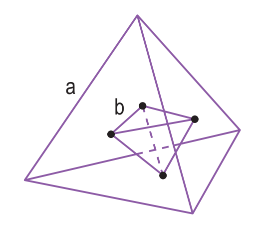
Medidas

| Área total ($A_T$) | Volumen (V) | Apotema ($a_p$) |
|---|---|---|
| $A_T = 5a^2\sqrt{3}$ | $V = \dfrac{5a^3}{6}\sqrt{\dfrac{7+3\sqrt{5}}{2}}$ | $a_p = \dfrac{a}{2}\sqrt{\dfrac{7+3\sqrt{5}}{6}}$ |

## POLIEDROS CONJUGADOS

Son un par de poliedros regulares conjugados cuando el número de caras de uno de ellos es igual al número de vértices del otro. Todo poliedro puede ser inscrito en su conjugado.

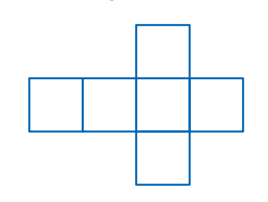
**Un tetraedro regular dentro de otro tetraedro regular**



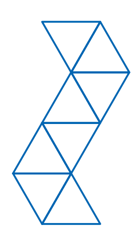

$b = \dfrac{a}{3}$

**Nota**

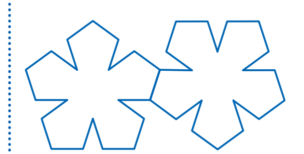
El grado de desarrollo del hexaedro regular es siete.



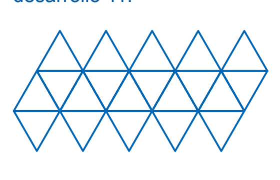
El grado de desarrollo para un octaedro regular es cinco.



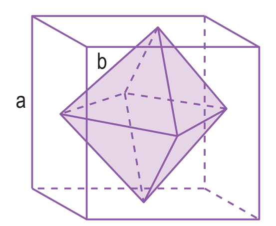
El grado de desarrollo del dodecaedro regular es 19 en este caso:



En el caso mostrado, el icosaedro tiene en grado de desarrollo 11.

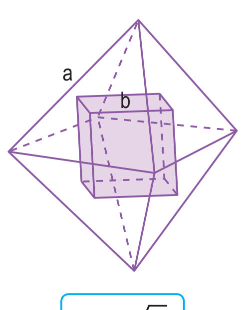


### Un octaedro regular dentro de un hexaedro regular



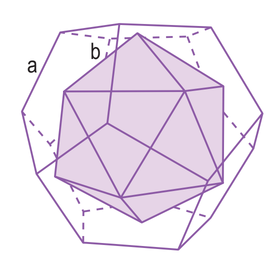

$$b = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

### Un hexaedro regular dentro de un octaedro regular



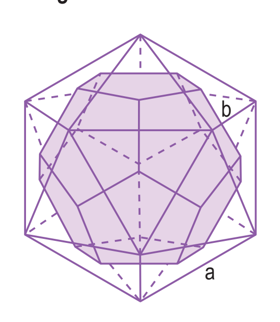

$$b = \frac{a\sqrt{2}}{3}$$

### Un icosaedro regular dentro de un dodecaedro regular




$$b = \frac{a}{15}(6\sqrt{5} + 10)$$

### Un dodecaedro regular dentro de un icosaedro regular




$$b = \frac{a}{6}(\sqrt{5} + 1)$$

**Atención**

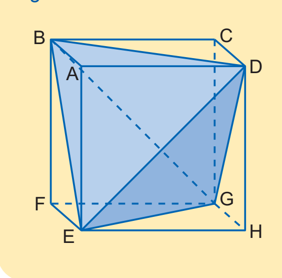
En un icosaedro regular de arista $\ell$, el radio R de la superficie esférica que lo circunscribe es:

$$R = \frac{\ell\sqrt{3}}{12}(\sqrt{3} + \sqrt{5})$$



**Observación**

En un hexaedro regular cuatro vértices no consecutivos determinan un tetraedro regular.






Ejemplos:

1. Halla el área del octaedro regular donde la distancia entre los centros de gravedad de dos caras opuestas que tienen un vértice común es **a.**

   Resolución:
   Sean $G_1$ y $G_2$ los centros de gravedad de 2 caras opuestas; se forma el triángulo $V_1MN$, observe que este triángulo con el triángulo $V_1G_1G_2$ son semejantes, por lo tanto:

   $$\frac{\ell}{a} = \frac{3}{2} \Rightarrow \ell = \frac{3a}{2}$$

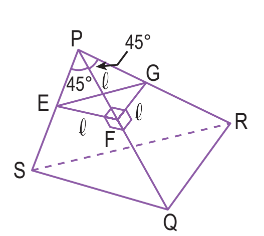
   El área del octaedro es:

   $$A_8 = 8\left(\frac{3a}{2}\right)^2\frac{\sqrt{3}}{4}$$

   $$\therefore\ A_8 = \frac{9a^2}{2}\sqrt{3}$$

2. En un tetraedro PQRS, el ángulo diedro correspondiente a una arista PQ es recto y los ángulos QPR y QPS miden 45°, entonces el ángulo RPS mide:

   Resolución:
   Se observa que:
   ◺EFP: triángulo notable de 45° PF = EF = $\ell$
   ◺PFG: triángulo notable de 45° PF = FG = $\ell$
   Se deduce que PG = $\ell\sqrt{2}$ y PE = $\ell$ = $\sqrt{2}$
   Además en ◺EFG: EG = $\ell\sqrt{2}$
   Por lo tanto el $\triangle$EGP es equilátero, luego el ángulo GPE mide 60°.

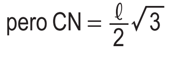



3. Halla el área de la proyección de una cara de un tetraedro regular sobre otra cara si el área total es 600 m$^2$.

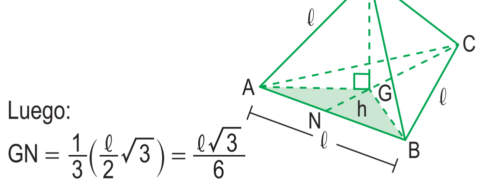
   Resolución:
   El área total del tetraedro = $\ell^2\sqrt{3}$

   $$\Rightarrow \ell^2\sqrt{3} = 600 \Rightarrow \ell^2 = \frac{600}{\sqrt{3}} \Rightarrow \ell^2 = 200\sqrt{3}$$

   Como G es baricentro del $\triangle$ABC: GN = $\frac{1}{3}$CN;

   pero CN = $\frac{\ell}{2}\sqrt{3}$




   Luego:

   $$GN = \frac{1}{3}\left(\frac{\ell}{2}\sqrt{3}\right) = \frac{\ell\sqrt{3}}{6}$$

   Área del $\triangle$AGB:

   $$S_{\triangle AGB} = \frac{\ell h}{2} = \frac{\ell(\ell)\sqrt{3}/6}{2} = \frac{\ell^2\sqrt{3}}{12}$$

   $$S_{\triangle AGB} = \frac{200\sqrt{3}(\sqrt{3})}{12} = 50\ m^2$$

# Problemas resueltos

**1** En un poliedro convexo, la suma del número de caras, el número de vértices, y el número de aristas es 28. Si los ángulos en todas las caras suman 1800°, halla el número de caras.

**Resolución:**

Piden: n.° de caras = C

Datos:

$C + V + A = 28$ ...(1)

$S_{m\angle icaras} = 1800°$ ...(2)

Se sabe: (teorema de Euler)

$C + V = A + 2$ ...($\alpha$)

$\Rightarrow$ ($\alpha$) en (1):

$A + 2 + A = 28 \Rightarrow A = 13$

Se sabe:

$S_{m\angle icaras} = 360°(V - 2)$

En (2): $360°(V - 2) = 1800°$

$\Rightarrow V = 7$

En ($\alpha$): $C + 7 = 13 + 2$

$\therefore$ C = 8

**2** ¿Cuánto suman las medidas de los ángulos en todas las caras de un dodecaedro regular?

**Resolución:**

El dodecaedro regular está formado por 12 pentágonos regulares. La suma de las medidas de los ángulos en cada cara es $180°(n - 2) = 540°$. Como son 12, entonces: $(12)540° = 6480°$

**3** Calcula el número de diagonales en un dodecaedro regular.

**Resolución:**

Para calcular el número de diagonales usamos:

$ND_P = C_2^V - A - \Sigma D_C$ ... (1)

En un dodecaedro: V = 20; C = 12; A = 30

$C_2^V = C_2^{20} = \frac{20!}{2!(18!)} = 190$ ... ($\alpha$)

El dodecaedro tiene 12 caras las cuales son pentágonos regulares, n = 5

n.° de diagonales $= \frac{n(n-3)}{2} = \frac{5(2)}{2} = 5$

Pero como son 12 caras, se tendrán:

12(5) = 60 diagonales

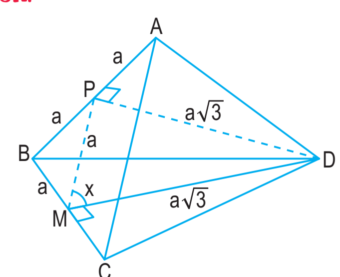
Así: $\Sigma D_C = 60$ ... ($\beta$)

Reemplazando ($\alpha$) y ($\beta$) en (1):

$ND_P = 190 - 30 - 60 = 100$ $\therefore ND_P = 100$

**4** En un tetraedro regular ABCD, si M es punto medio de $\overline{BC}$, calcula la medida del ángulo formado entre las rectas MD y AC.

**Resolución:**




x: medida del ángulo entre $\overline{MD}$ y $\overline{AC}$

Ley de cosenos:

$(a\sqrt{3})^2 = (a\sqrt{3})^2 + a^2 - 2(a)(a\sqrt{3})\cos x \Rightarrow \cos x = \frac{\sqrt{3}}{6}$

$\therefore x = \arccos\frac{\sqrt{3}}{6}$

**5** En un octaedro regular de arista a, halla la distancia de su centro a una de sus caras.

**Resolución:**

Del gráfico piden: OF

Las diagonales de un octaedro regular son congruentes. (Esto es fácil demostrar).

Entonces:

$AO = OB = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

$OM = \frac{a}{2}$

En el $\Delta$MOB:

$\frac{1}{(OF)^2} = \frac{1}{(OB)^2} + \frac{1}{(OM)^2}$

$\frac{1}{(OF)^2} = \frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} + \frac{1}{\left(\frac{a}{2}\right)^2}$ $\therefore OF = \frac{a\sqrt{6}}{6}$

**6** Halla la distancia entre los baricentros de dos caras de un tetraedro regular de arista a.

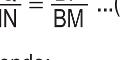
**Resolución:**

Sea ABCD el tetraedro.

P: baricentro de ABD

Q: baricentro de DBC

$\Delta PBQ \sim \Delta MBN$:



$\frac{PQ}{MN} = \frac{BP}{BM}$ ...(1)

Siendo:

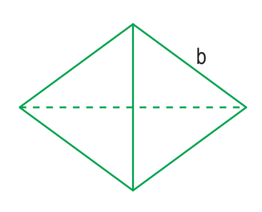
$MN = \frac{a}{2}$ y $\frac{BP}{BM} = \frac{2}{3}$ (Propiedad del baricentro)

En (1): $\frac{PQ}{a/2} = \frac{2}{3}$ $\therefore PQ = \frac{a}{3}$

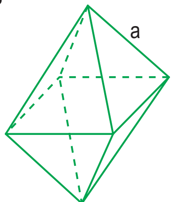
**7** El área total de un tetraedro regular es igual al área total de un octaedro regular de arista igual a 4. Calcula la medida de la arista del tetraedro regular.

**Resolución:**

Sabemos que las áreas totales son iguales:




$A_T = b^2\sqrt{3}$




$A_T = 2a^2\sqrt{3}$

$b^2\sqrt{3} = 2a^2\sqrt{3}$

$\Rightarrow b^2\sqrt{3} = 2 \cdot 4^2\sqrt{3} \Rightarrow b = 4\sqrt{2}$

**8** En un poliedro de 16 caras, 8 son cuadrangulares y las restantes son triangulares y pentagonales. Si la suma de los números de vértices y aristas del poliedro es 50, calcula el número de diagonales del poliedro.

**Resolución:**

1.er paso: tenemos:

16C $\Rightarrow$ 8 □ y 8(△ y ⬠)

$V + A = 50$

Del teorema de Euler:

$C + V = A + 2$

$16 + V = A + 2$

$A - V = 14$

$\begin{cases} A - V = 14 \\ V + A = 50 \end{cases} \Rightarrow \quad A = 32, \quad V = 18$

2.° paso: del 5.° teorema:

$A = \dfrac{k_1 l_1 + k_2 l_2 + k_3 l_3}{2}$

8 □, x △, 8 − x ⬠ } 8 caras

$32 = \dfrac{8(4) + x(3) + (8 - x)(5)}{2} \Rightarrow x = 4$

$\Rightarrow$ hay: 8 □, 4△, 4⬠

3.er paso: del 4.° teorema:

$ND_p = C_2^V - A - ND_{caras}$

□ $\Rightarrow$ 2 diagonales

△ $\Rightarrow$ 0 diagonales

⬠ $\Rightarrow$ 5 diagonales

$ND_p = C_2^{18} - 32 - 8(2) - 4(5)$

$\therefore ND_p = 153 - 68 = 85$

**9** Un poliedro tiene cinco caras cuadrangulares, cuatro caras triangulares y algunas caras pentagonales. Si se sabe que la suma de las medidas de los ángulos interiores de todas sus caras es 5760°, calcula el número de caras pentagonales de dicho poliedro.

**Resolución:**

Sean:

C: n.° de caras

V: n.° de vértices

A: n.° de aristas

Datos:

Número y forma de sus caras $\begin{cases} 5 □ \\ 4 △ \\ x ⬠ \end{cases}$

$C = 9 + x$ ...(1)

$S_{m\angle caras} = 5760°$

Piden x

$A = \dfrac{k_1 l_1 + k_2 l_2 + k_3 l_3}{2}$

$A = \dfrac{4(5) + 3(4) + 5x}{2}$ ...(2)

$S_{m\angle icaras} = 360°(A - C)$ ...(3)

Reemplazando (1) y (2) en (3):

$5760° = 360°\left(\dfrac{(32 + 5x)}{2} - (9 + x)\right)$

Resolviendo: $x = 6$

**10** En un poliedro cuya superficie está formado solo por regiones triangulares, se verifica que $2C = V^2 - 3V + 4$ donde C es el número de caras y V es el número de vértices. Calcula el número de diagonales del poliedro.

**Resolución:**

$ND_p$: n.° de diagonales del poliedro

$ND_p = C_2^V - A - ND_{caras}$ ...(1)

Como las caras son regiones triangulares:

$ND_{caras} = 0$

$C_2^V = \dfrac{V!}{2!(V-2)!} = \dfrac{V(V-1)(V-2)!}{2!(V-2)!} = \dfrac{V(V-1)}{2}$

Por teorema de Euler:

$A = C + V - 2$

Reemplazando en (1):

$ND_p = \dfrac{V(V-1)}{2} - (C + V - 2) - 0$ ...(2)

Del dato:

$C = \dfrac{V^2 - 3V + 4}{2}$

Luego reemplazando en (2):

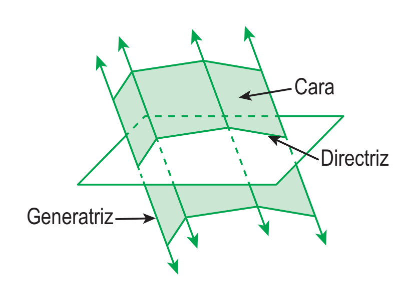
$ND_p = \dfrac{V(V-1)}{2} - \left(\dfrac{V^2 - 3V + 4}{2} + V - 2\right)$

$\therefore ND_p = 0$

# PRISMA

## SUPERFICIE PRISMÁTICA

Es aquella superficie que se genera por el desplazamiento de una recta secante a un plano y que se mantiene paralela a su posición inicial; dicha recta se desplaza por una línea poligonal no secante a sí misma contenida en el plano.




### Elementos

- **Directriz**
  Es la línea poligonal que dirige el desplazamiento de la recta secante.
- **Generatriz**
  Es la recta secante que se desplaza paralela a sí misma.
- **Cara**
  Conjunto de todas las generatrices que contienen los puntos de un lado de la línea poligonal.

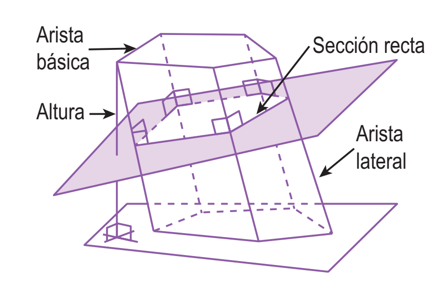
**Observación**

La superficie prismática generada por el desplazamiento de una recta es una superficie reglada.



## PRISMA

Es aquel sólido limitado por una superficie prismática cerrada y 2 planos paralelos entre sí y secantes a dicha superficie prismática. A las dos caras paralelas y congruentes se las denomina bases; las otras caras son denominadas caras laterales.



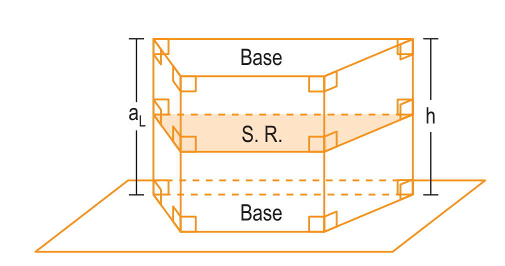

- **Altura** (H)
  Distancia entre las dos bases.
- **Sección recta** (SR)
  Sección determinada por un plano perpendicular y secante a las aristas laterales.

**Nota**

Se conoce como arista a la generatriz que contiene un vértice de la directriz.

### Prisma recto

Es aquel prisma cuyas aristas laterales son perpendiculares a las bases.




$a_L = h$

h : altura

$a_L$ : arista lateral

$A_{Base} = A_{S.\,R.}$

$A_{Base}$: área de la base

$A_{S.\,R.}$: área de la sección recta



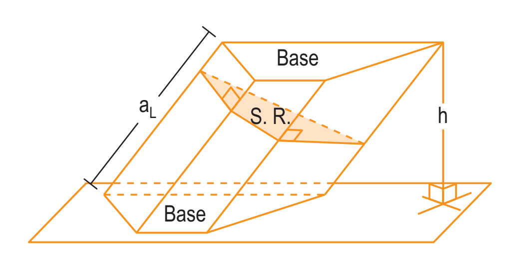
**Observación**

En todo prisma el número de aristas es múltiplo de 3.

| Área lateral ($A_L$) | Área total ($A_T$) | Volumen (V) |
|---|---|---|
| $A_L = 2pa_L$<br>2p: perímetro de la base | $A_T = A_L + 2A_{Base}$ | $V = A_{Base}a_L$ |

## Prisma oblicuo

Son los prismas donde las aristas no son perpendiculares a las bases.




$a_L > h$

$A_{Base} > A_{S.\,R.}$

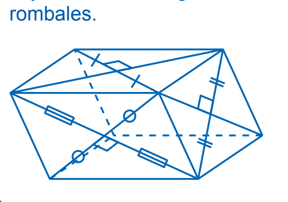
Medidas

| Área lateral ($A_L$) | Área total ($A_T$) | Volumen (V) |
|---|---|---|
| $A_L = 2p_{SR}a_L$<br>$2p_{SR}$ : perímetro de la sección recta. | $A_T = A_L + 2A_{Base}$ | $V = A_{SR}a_L = A_{Base}h$ |



**Nota**

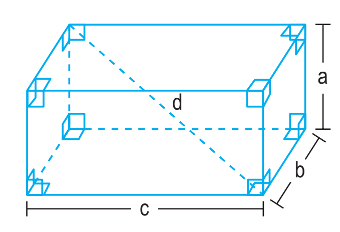
**Romboedro**
Es aquel paralelepípedo cuyas caras son regiones rombales.



## PARALELEPÍPEDO

Es aquel prisma cuyas bases y caras son regiones paralelográmicas.

### Paralelepípedo rectangular




- **Área de la superficie lateral** ($A_L$)
  $A_L = 2a(b + c)$
- **Volumen** (V)
  $V = abc$
- **Diagonal** (d)
  $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$

**Recuerda**

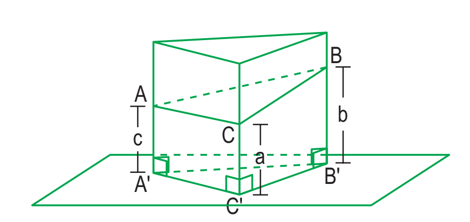
El paralelepípedo rectangular es también llamado rectoedro u ortoedro.



## TRONCO DE PRISMA

Es aquella porción de prisma comprendida entre una base y un plano no paralelo a ella que interseca a todas las aristas laterales.

### Tronco de prisma triangular recto

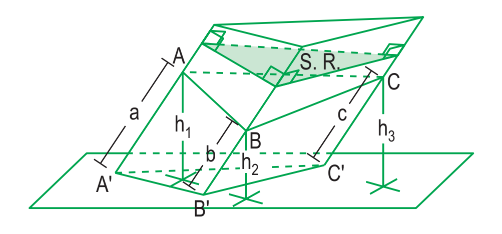



**Volumen** (V)

$$V = (A_{A'B'C'})\left(\frac{a+b+c}{3}\right)$$

$A_{A'B'C'}$ : área de la sección recta.

### Tronco de prisma triangular oblicuo




**Volumen** (V)

$$V = (A_{A'B'C'})\left(\frac{h_1+h_2+h_3}{3}\right) \qquad V = A_{SR}\left(\frac{a+b+c}{3}\right)$$

$A_{A'B'C'}$: área de la base. $A_{SR}$: área de la sección recta.

# Problemas resueltos

**1** El área total de un prisma hexagonal es el triple de su área lateral. Halla el volumen del prisma si el lado de la base mide 4.

**Resolución:**

Dato:

$A_{ST} = 3A_{SL}$ ... (1)

Pero $A_{ST} = 2 \times 6\left(\frac{4^2\sqrt{3}}{4}\right) + A_{SL}$

$\Rightarrow A_{ST} = 48\sqrt{2} + A_{SL}$ ... (2)

De (1) y (2): $2A_{SL} = 48\sqrt{3}$

$A_{SL} = \underbrace{24\sqrt{3}}$

$6(4h) = 24\sqrt{3}$

$\Rightarrow h = \sqrt{3}$

Luego el volumen:

$V = (A_{base})h \Rightarrow V = 6(4\sqrt{3})\sqrt{3}$ $\therefore V = 72$

**2** Calcula el volumen de un prisma regular, tal que su base es un pentágono, cuyo apotema mide 4 m y conociendo además que el área de una cara lateral es 16 m$^2$.

**Resolución:**

Dato:

$ab = 16$ m$^2$

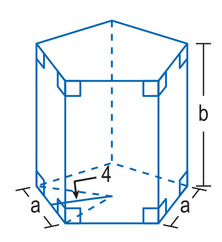
$V = A_{base}\,h$

$V = \left(\frac{5a4}{2}\right)b$

$V = 10ab$

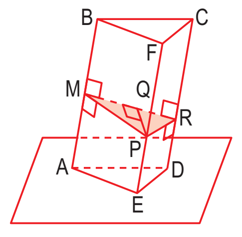
$V = 10(16)$

$\therefore V = 160$ m$^3$




**3** Halla el volumen de un prisma oblicuo triangular, sabiendo que el área de una cara lateral es 5 cm$^2$ y la distancia de la arista opuesta a esta es 10 cm.

**Resolución:**




Consideremos el prisma de la figura, donde la cara lateral ABCD tiene área 5 cm$^2$, según enunciado. PQ = 10 cm, es la distancia de la arista EF al plano ABCD. PQ se encuentra en una sección recta del prisma, tal como MPR.

Se tiene: $A_{ABCD} = 5$ cm$^2$

$\Rightarrow AB \times MR = 5$ cm$^2$ ...(1)

El volumen del prisma:

$V = (A_{MPR})(AB) \Rightarrow V = \left(\frac{MR \times PQ}{2}\right)(AB)$

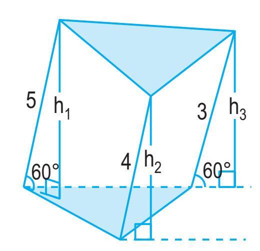
$V = \frac{1}{2}(AB)(MR)PQ \Rightarrow V = \frac{1}{2}(A_{ABCD})PQ$

Con los datos:

$V = \frac{1}{2}(5)(10)$ $\therefore$ $V = 25$ cm$^3$

**4** La base de un tronco de prisma oblicuo triangular tiene un área de 12. Halla el volumen del sólido, sabiendo que las aristas laterales están inclinadas 60° respecto a la base y tienen longitudes de 3; 4 y 5, respectivamente.

**Resolución:**




Incógnita: V = ?

Del gráfico, $h_1$, $h_2$ y $h_3$ son alturas del sólido.

Además, por triángulo notable (30° y 60°):

$h_1 = \frac{5}{2}\sqrt{3}$; $h_2 = 2\sqrt{3}$ y $h_3 = \frac{3}{2}\sqrt{3}$

Cálculo del volumen:

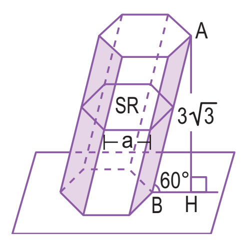
$V = \left(\frac{h_1 + h_2 + h_3}{3}\right)B$; B es el área de la base.

Por dato: B = 12; luego:

$V = \frac{1}{3}\left(\frac{5}{2}\sqrt{3} + 2\sqrt{3} + \frac{3}{2}\sqrt{3}\right)12$ $\therefore V = 24\sqrt{3}$

**5** Halla el área lateral de un prisma oblicuo, cuya sección recta es un hexágono regular de área $24\sqrt{3}$ m$^2$. La altura del prisma es $3\sqrt{3}$ m y las aristas laterales forman ángulos de 60° con la base.

**Resolución:**




El triángulo rectángulo AHB es de 30° y 60°.

El cateto $AH = 3\sqrt{3}$ m por dato, luego la hipotenusa AB = 6 m.

Para hallar la longitud del lado de la sección recta, utilizamos el dato: $A_{SR} = 24\sqrt{3}$ m$^2$

Entonces: $\frac{3}{2}a^2\sqrt{3} = 24\sqrt{3}$

$a = 4$

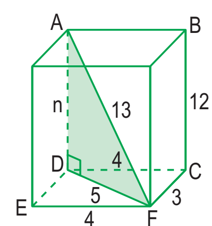
El área de la superficie lateral:

$A_{SL} = 6a(AB) = 6(4)(6) = 144$

$\therefore A_{SL} = 144$ m$^2$

**6** Calcula el área total de un paralelepípedo rectángulo de 13 m de diagonal, siendo las dimensiones de la base, 3 m y 4 m.

**Resolución:**




Diagonal (d) = 13 m

De la figura por el teorema de Pitágoras:

$DF^2 = 3^2 + 4^2 \Rightarrow DF = 5$ m

Además:

$n^2 = 13^2 - 5^2 \Rightarrow n = 12$

Nos piden el área total del paralelepípedo: $A_{ST}$

$A_{ST} = 2(ab + bc + ac)$

$A_{ST} = 2[(3)(4) + (3)(12) + (4)(12)]$

$\therefore A_{ST} = 192\ m^2$

**7** Calcula el volumen de un prisma recto de 432 $m^2$ de área total, si su base es un triángulo cuyos lados se hallan en progresión aritmética de producto 480 $m^3$; la altura del prisma mide el doble del lado medio del triángulo de la base.

**Resolución:**

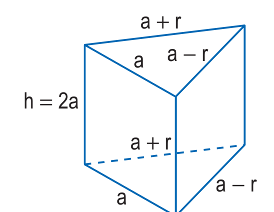
Por dato:

$(a - r)(a)(a + r) = 480$

$(a - r)(a)(a + r) = (6)(8)(10)$

$(a - r)(a)(a + r) = (8 - 2)(8)(8 + 2)$

$\Rightarrow a = 8 \wedge r = 2$



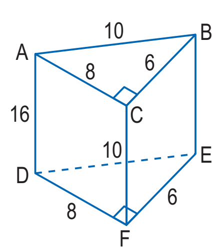

En donde su área total = 432 $m^2$

Además, la base cumple con el teorema de Pitágoras.

$\Rightarrow m\angle ACB = m\angle DFE = 90°$

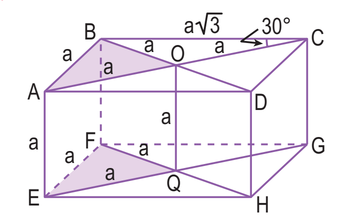
$V_{prisma} = A_{base}\,h = \dfrac{(8)(6)}{2}16 = 384$

$\therefore V_{prisma} = 384\ m^3$




**8** En un rectoedro ABCD-EFGH, los centros de sus bases ABCD y EFGH son los puntos O y Q. Si el volumen del sólido ABO-EFQ cuyas caras son cuadrados, es $16\sqrt{3}$; calcula el área de la superficie lateral de dicho paralelepípedo.

**Resolución:**



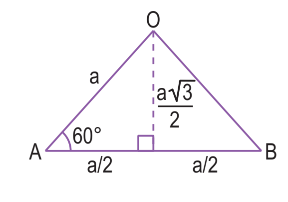

Nos piden: $A_{SL}$

Tenemos:

Por dato: $V_{ABO-EFQ} = 16\sqrt{3}$

$$\frac{a^2\sqrt{3}}{4}a = 16\sqrt{3}$$

$\Rightarrow a = 4$



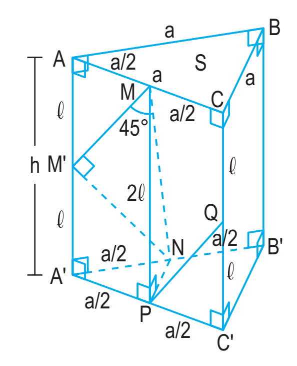

$\Rightarrow A_{SL} = 2a^2\sqrt{3} + 2a^2\sqrt{3} + 2a^2$

$= 4a^2\sqrt{3} + 2a^2$

$\therefore A_{SL} = 32(2\sqrt{3} + 1)$

**9** En un prisma triangular regular ABC-A'B'C' cuya arista básica mide a, se ubican los puntos medios M, N, P y Q de AC, A'B', $\overline{A'C'}$ y CC' respectivamente. Si la medida del ángulo que determina $\overline{MN}$ y PQ es 45°, calcula el volumen del prisma.

**Resolución:**




Piden $V_{prisma}$, sabemos

$V_{prisma} = S(2\ell)$ ...(I)

Dato

La medida del ángulo que determina

$\overline{MN}$ y $\overline{PQ}$ es 45°

Se traza $\overline{MM'}$ // $\overline{QP}$ $\longrightarrow$ $m\angle M'MN = 45°$

Se nota M'M = M'N

Se traza $\overline{MP}$

Entonces $\overline{MP}$ es perpendicular a la base, por lo cual $\overline{MP} \perp \overline{PN}$.

En los triángulos rectángulos MM'N y MPN se aplica el teorema de Pitágoras

$(MN)^2 = (MM')^2 + (M'N)^2 = (NP)^2 + (MP)^2$

$$(MN)^2 = \frac{a^2}{4} + \ell^2 + \frac{a^2}{4} + \ell^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + (2\ell)^2$$

$$\frac{a^2}{2} + 2\ell^2 = \frac{a^2}{4} + 4\ell^2$$

$$\frac{a^2}{4} = 2\ell^2 \Rightarrow \ell = \frac{a\sqrt{2}}{4} \quad ...(II)$$

(I) en (II)

$$V_{prisma} = \left(\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\right)\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)$$

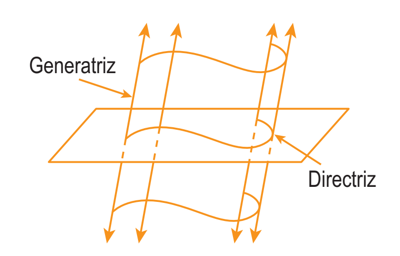
$$\therefore V_{prisma} = \frac{a^3\sqrt{6}}{8}$$

# CILINDRO



## SUPERFICIE CILÍNDRICA

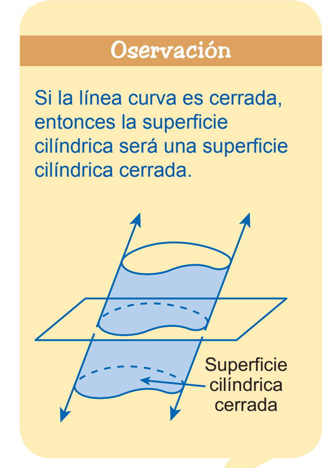
Dada una línea curva no secante a sí misma contenida en un plano; la superficie cilíndrica se genera mediante el desplazamiento de una recta secante a dicho plano por la línea curva y que se mantiene paralela a su posición inicial.




### Elementos

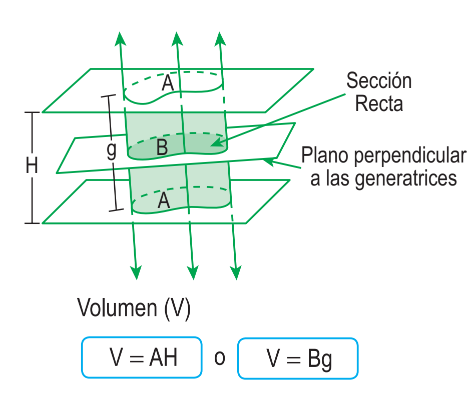
**Directriz**
Es la línea curva plana por el cual se dirige el desplazamiento de la recta secante al plano.

**Generatriz**
Es la recta que se desplaza en forma paralela a sí misma.




## CILINDRO

Es aquel sólido limitado por una superficie cilíndrica cerrada y por dos planos paralelos entre sí secantes a la superficie cilíndrica. A las secciones congruentes determinadas en los planos paralelos se les llama bases del cilindro.




**Altura** (H)
Distancia entre los planos paralelos.

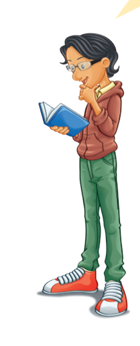
**Sección recta** (B)
Sección determinada por un plano perpendicular a las generatrices.

Volumen (V)

$V = AH$ o $V = Bg$

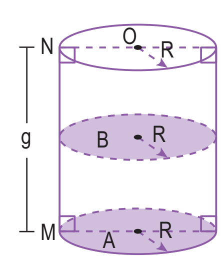


A: área de la base
B: área de la sección recta
g: longitud de la generatriz



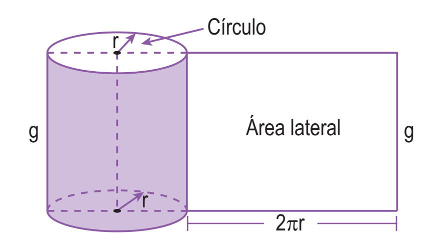
### Cilindro circular recto

Es aquel cilindro cuyas bases son círculos y sus generatrices perpendiculares a las bases. También es denominado cilindro de revolución porque es generado por una región rectangular al girar una vuelta en torno a uno de sus lados




g: longitud de la generatriz
A: área de la base
B: área de la sección recta
$A = B$

**Desarrollo de la superficie lateral de un cilindro recto**
Es la región plana que se obtiene al desarrollar sobre un plano la superficie lateral de un cilindro.




**Área de la superficie lateral** ($A_L$)
$A_L = 2\pi rg$

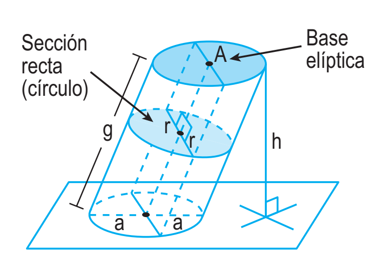
**Área de la superficie total** ($A_T$)
$A_T = 2\pi r(g + r)$

**Volumen** (V)
$V = \pi r^2 g$



## Cilindro oblicuo de sección recta circular

Son aquellos cilindros cuyas generatrices no son perpendiculares a las bases




**Área de la superficie lateral** ($A_L$)

$A_L = 2\pi rg$

r: radio de la sección recta

**Volumen (V)**

$V = Ah$ o $V = \pi r^2 g$

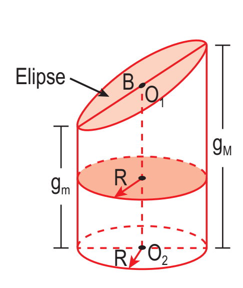
A : área de la base

r : radio de la sección recta

## Tronco de cilindro

Es aquella porción de cilindro limitado por una base y un plano secante a las generatrices y no paralela a dicha base. Los elementos como base y la superficie lateral conservan su definición además de otros elementos (generatrices y sección recta).

**Tronco de cilindro circular recto**




**Volumen del tronco** (V)

$$V = \pi R^2 O_1O_2 = \pi R^2 \frac{(g_M + g_m)}{2}$$

$g_M$ : generatriz mayor

$g_m$ : generatriz menor

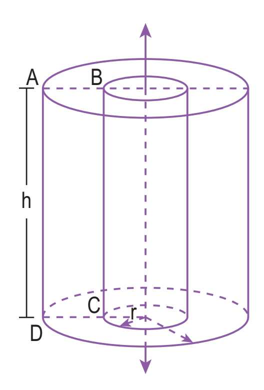
R : radio de la sección recta y la base

**Área de la superficie lateral** ($A_L$)

$$A_L = \pi R(g_m + g_M)$$

**Anillo cilíndrico**

Se denomina así al sólido que se genera cuando una región rectangular gira, respecto de una recta paralela a uno de sus lados y exterior a la región, una medida angular de 360°.




Notación:

Anillo AB-CD

**Área de la superficie lateral**

$A_{S.L.} = 2\pi h(R + r)$

**Área de la superficie total**

$A_{S.T.} = 2\pi(R + r)(h + R - r)$

**Volumen**

$V_{(anillo)} = \pi(R^2 - r^2)h$

**Cuña cilíndrica**

Se denomina así al sólido que se genera cuando una región rectangular gira, respecto de uno de sus lados, una medida angular menor de 360°.

Notación:

Cuña $O_1AB\text{-}O_2DC$

**Área de la superficie lateral**

$$A_{S.L.} = \frac{\alpha}{180°}\pi rh + 2rh$$

**Área de la superficie total**

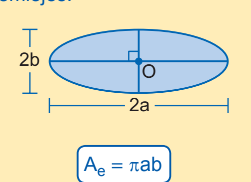
$$A_{S.T.} = \frac{\alpha}{180°}\pi rh + 2rh + \frac{\alpha\pi r^2}{180°}$$

**Volumen**

$$V_{(cuña)} = A_{base}(h) = \frac{\alpha\pi r^2}{360°}h$$

**Observación**

El área de una región elíptica se calcula en función de sus semiejes:




$A_e = \pi ab$

$A_e$ : área de la superficie elíptica

O : centro de la elipse

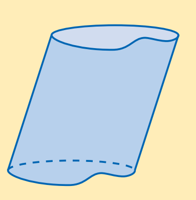
**Atención**

Según la convexidad de la base, los cilindros se clasifican en:





Cilindro convexo (base convexa)



Cilindro no convexo (base no convexa)



# Problemas resueltos



**1** Si $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ son generatrices opuestas de un cilindro recto y O punto medio de $\overline{BC}$. Siendo E un punto de $\overline{CD}$, tal que: $\overline{OE} \perp \overline{AE}$, CE = 8 cm y DE = 9 cm. Calcula el área de la superficie total del sólido.

**Resolución:**

Sea r: radio de la base

$\triangle OCE \sim \triangle EDA$

$\Rightarrow \frac{r}{9} = \frac{8}{2r}$

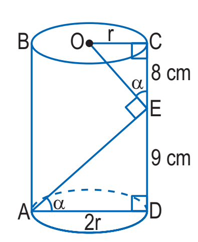
$r = 6$

$A_{ST} = A_{SL} + 2\pi r^2$

$A_{ST} = 2\pi r(CD) + 2\pi r^2$

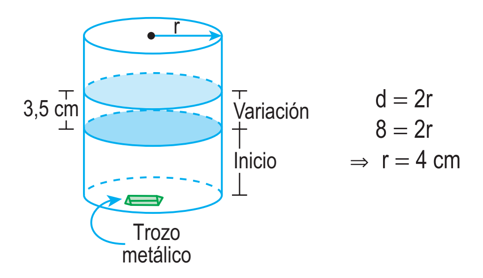
$A_{ST} = 2\pi 6(17) + 2\pi \cdot 6^2$

$\therefore \quad A_{ST} = 276\pi \text{ cm}^2$




**2** Un cilindro está lleno de agua hasta la mitad. Se suelta un trozo metálico y el nivel del agua sube en 3,5 cm. Si el diámetro del cilindro es 8 cm, ¿cuál es el volumen del trozo?

**Resolución:**




d = 2r

8 = 2r

$\Rightarrow$ r = 4 cm

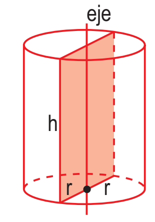
La variación es debido al trozo, su volumen es:

$V = \pi \times 4^2 \times 3,5$

$\therefore V = 176 \text{ cm}^3$ (apróx.)

**3** Halla el área de un cilindro circular recto, sabiendo que el área de la sección determinada por un plano que contiene al eje es S.

**Resolución:**




Observamos en la figura que la sección es un rectángulo cuya región tiene por área:

2rh $\Rightarrow$ por dato: 2rh = S

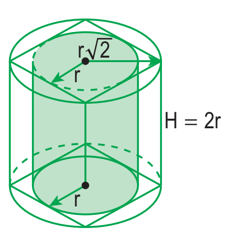
Sabemos que el área lateral del cilindro es:

$A_L = (2\pi r)h = \pi(2rh)$

$\therefore \; A_L = \pi S$

**4** En un cubo de volumen V se inscribe y circunscribe dos cilindros de revolución. Calcula el volumen del sólido comprendido entre los cilindros.

**Resolución:**




Se observa que el radio de la base del cilindro inscrito es r, entonces el radio de la base del cilindro circunscrito es $r\sqrt{2}$.

Volúmenes:

Del cilindro mayor $= \pi(r\sqrt{2})^2(2r)$

Del cilindro menor $= \pi(r)^2(2r)$

Diferencia de volúmenes ($\Delta V$):

$\Delta V = \pi(2r^2)(2r) - \pi(r)^2(2r) \Rightarrow \Delta V = 2\pi r^3$ ...(1)

Dato:

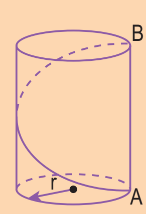
$V_{cubo} = V \Rightarrow 8r^3 = V \Rightarrow r^3 = \frac{V}{8}$

Reemplazando en (1):

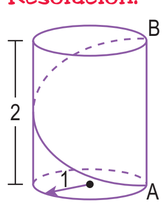
$\Delta V = 2\pi\left(\frac{V}{8}\right)$

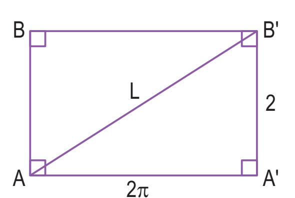
$\therefore \; \Delta V = \frac{\pi V}{4}$

**5** La curva de longitud mínima, trazada desde A hacia B (sobre una misma generatriz) que da una vuelta completa en torno al cilindro recto de radio 1 y altura 2, tiene por medida L. Halla el valor de L.




**Resolución:**



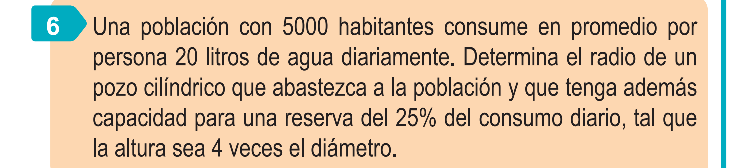




Del gráfico, desarrollamos la superficie lateral a través de la generatriz AB.

$AA' = 2\pi$

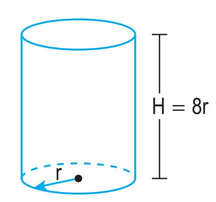
$L^2 = 2^2 + (2\pi)^2 \Rightarrow L^2 = 4 + 4\pi^2$

$\therefore \; L = 2\sqrt{1+\pi^2}$



**6** Una población con 5000 habitantes consume en promedio por persona 20 litros de agua diariamente. Determina el radio de un pozo cilíndrico que abastezca a la población y que tenga además capacidad para una reserva del 25% del consumo diario, tal que la altura sea 4 veces el diámetro.

**Resolución:**




Consumo diario: $5000 \times 20 = 100\,000\ \text{L} = 100\ \text{m}^3$

Como el pozo debe tener una reserva del 25%,

entonces: $\dfrac{25}{100}(100\ \text{m}^3) = 25\ \text{m}^3$

El volumen total será:

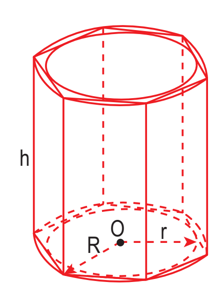
$V = (100 + 25) = 125\ \text{m}^3$

Luego: $(\pi r^2)8r = 125 \Rightarrow r^3 = \dfrac{125}{8\pi}$

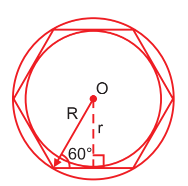
$$\therefore r = \frac{5}{2\sqrt[3]{\pi}}$$

**7** Se tiene un cilindro recto de revolución, en cada una de sus bases se inscribe un hexágono regular. Se construye un segundo cilindro de revolución cuyas bases están inscritas en los hexágonos mencionados. Calcula la relación entre los volúmenes del cilindro menor y mayor.

**Resolución:**




En la base:




$\Rightarrow \dfrac{r}{R} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ...(1)

Piden:

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\pi r^2 h}{\pi R^2 h} = \frac{r^2}{R^2}$$

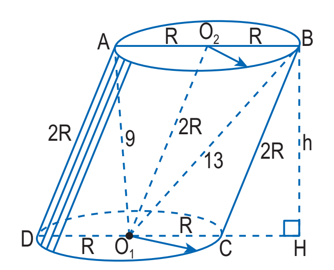
$\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{r^2}{R^2}$ ...(2)

Reemplazando (1) en (2):

$$\frac{V_1}{V_2} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$$

**8** Calcula el volumen de un cilindro oblicuo, cuyas bases son circulares, además la generatriz y el diámetro de la base son congruentes y la distancia del centro de una base a los extremos del diámetro de la otra base son 13 y 9 respectivamente.

**Resolución:**




En el $\triangle AO_1B$, por el teorema de la mediana:

$$9^2 + 13^2 = 2(2R)^2 + \frac{(2R)^2}{2}$$

$250 = 10R^2$

$25 = R^2 \Rightarrow R = 5$

En el $\triangle O_1BC$, por el teorema de Herón:

$$p = \frac{13 + 5 + 2(5)}{2} = 14$$

$$h = \frac{2}{5}\sqrt{14(14-13)(14-5)(14-10)} = \frac{2}{5}\sqrt{504}$$

$$\Rightarrow h = \frac{12\sqrt{14}}{5}$$

Piden: el volumen del cilindro oblicuo (V)

$V = (A_{base})h = (\pi R^2)h$

$$\Rightarrow V = \pi(5)^2\left(\frac{12\sqrt{14}}{5}\right) = 60\pi\sqrt{14}$$

$\therefore V = 60\pi\sqrt{14}$

**9** Halla el área lateral de un cilindro recto sabiendo que el área de la región elíptica inscrita en la sección determinada por un plano que contiene al eje es A.

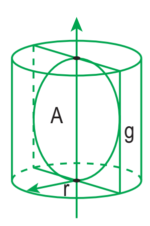
**Resolución:**

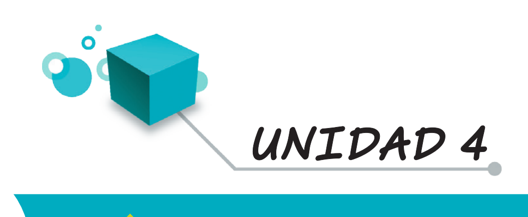
Piden: $A_L = 2\pi rg$

Por dato: $A = \pi r\left(\dfrac{g}{2}\right) \Rightarrow \pi rg = 2A$

$\Rightarrow A = 2\pi rg = 2(2A)$

$\therefore A_L = 4A$



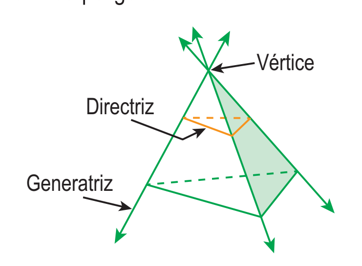





# PIRÁMIDE

## SUPERFICIE PIRAMIDAL

Se denomina superficie piramidal a la que es generada por una recta que mantiene un punto fijo al desplazarse sobre una línea poligonal llamada directriz.




### Elementos

**Vértice:** punto fijo por el cual concurren las generatrices.

**Directriz:** línea poligonal por donde pasan las generatrices.

**Generatriz:** recta cuyo desplazamiento genera la superficie piramidal.

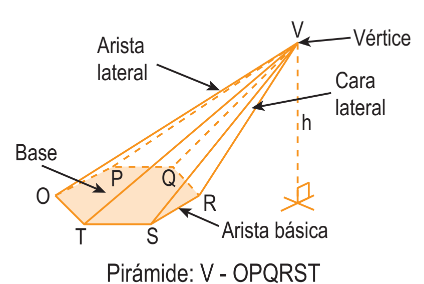
**Observación**

Si la directriz es una línea curva la superficie será cónica.



## PIRÁMIDE

Sólido geométrico o región del espacio, limitado por una superficie piramidal y un plano secante a la superficie piramidal.




Pirámide: V - OPQRST

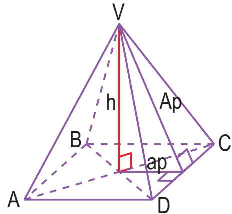
**Vértice:** es el vértice común de las caras laterales.

**Base:** plano secante que no contiene al vértice.

**Altura (h):** distancia del vértice al plano de la base.

### Clasificación

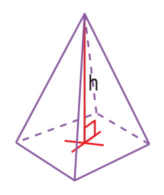
**Pirámide regular.** Es aquella pirámide cuya base es un polígono regular y sus caras laterales son triángulos isósceles congruentes entre sí. La altura de una pirámide regular cae en el centro de gravedad de la base.

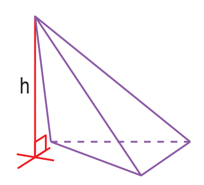



En una pirámide: V-ABCD donde:
Ap: apotema de la pirámide.
$A_B$: área de la base.
p: semiperímetro de la base.
ap: apotema de la base.

| Apotema de la pirámide (Ap) | Área total ($A_T$) | Área lateral ($A_L$) | Volumen V |
|---|---|---|---|
| $Ap^2 = h^2 + ap^2$ | $A_T = A_L + A_B$ | $A_L = pAp$ | $V = \frac{1}{3}A_Bh$ |

**Pirámide irregular.** Es aquella pirámide en la cual su base es un polígono irregular y convexo.

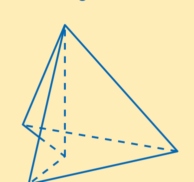


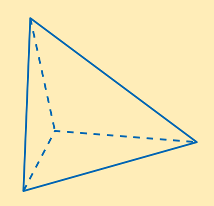

| Área lateral ($A_L$) | Área total ($A_T$) | Volumen (V) |
|---|---|---|
| $A_L = \Sigma$ de las áreas de las caras laterales | $A_T = A_L + A_B$ | $V = \frac{1}{3}A_Bh$ |

**Atención**

La clasificación de pirámides se dividen en convexas y no convexas pero nosotros estudiamos las pirámides convexas que se subdividen en regular e irregular.



Pirámide no convexa



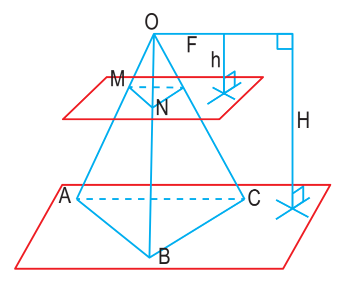
Pirámide convexa

**Nota**

Una pirámide será triangular, cuadrangular, pentagonal, etc, dependiendo si su base es un triángulo, cuadrado, pentágono, etc, respectivamente.

## TEOREMA

Si se interseca una pirámide cualquiera con un plano paralelo a su base se obtiene una pirámide parcial semejante a la pirámide total.




Las pirámides:
O-MNF y O-ABC son semejantes

Se cumple:

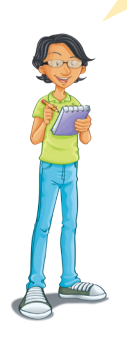
$$\frac{OM}{OA}=\frac{ON}{OB}=\frac{OF}{OC}=\frac{h}{H}$$

$$\frac{A_{MNF}}{A_{ABC}}=\frac{OM^2}{OA^2}=\frac{ON^2}{OB^2}=\frac{OF^2}{OC^2}=\frac{h^2}{H^2}$$ A: área

$$\frac{V_{O-MNF}}{V_{O-ABC}}=\frac{OM^3}{OA^3}=\frac{ON^3}{OB^3}=\frac{OF^3}{OC^3}=\frac{h^3}{H^3}$$ V: volumen

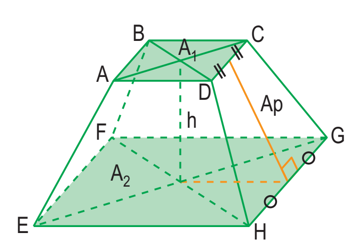
**Atención**

Este teorema se deduce del teorema de Thales.



### Tronco de pirámide regular

Es el sólido que se determina al cortar una pirámide regular con un plano paralelo a su base. Sus caras laterales son trapecios isósceles congruentes y su altura (h) es el segmento que une los centros de las bases.



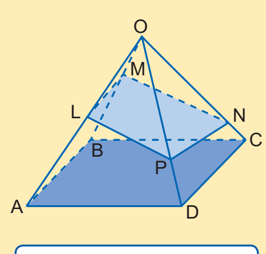

Donde:

$A_1$ : área de la base superior del tronco de pirámide.
$A_2$ : área de la base inferior del tronco de pirámide.
Ap : apotema del tronco de pirámide.
$p_1$; $p_2$ : semiperímetros de las bases.

| Área lateral ($A_L$) | Área total ($A_T$) | Volumen (V) |
|---|---|---|
| $A_L=(p_1+p_2)\,Ap$ | $A_T=A_L+A_1+A_2$ | $V=\frac{h}{3}[A_1+A_2+\sqrt{A_1A_2}]$ |

**Observación**

En una pirámide regular de base cuadrangular se cumple:

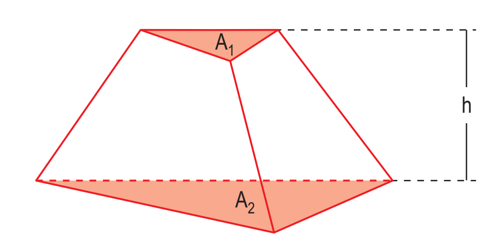



$$\frac{1}{OL}+\frac{1}{ON}=\frac{1}{OM}+\frac{1}{OP}$$



### Tronco de pirámide irregular

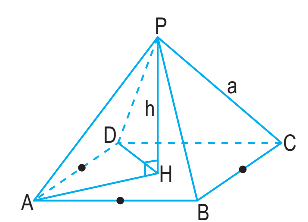
Es el sólido que se determina al cortar una pirámide irregular con un plano paralelo a su base. Sus caras laterales son trapecios escalenos.




| Área lateral ($A_L$) | Área total ($A_T$) | Volumen (V) |
|---|---|---|
| $A_L=\Sigma$ de las áreas de las caras laterales | $A_T=A_L+A_1+A_2$ | $V=\frac{h}{3}[A_1+A_2+\sqrt{A_1A_2}]$ |

**1** Una pirámide recta de base cuadrada tiene una altura de 1,20 m y cada una de las aristas laterales mide 1,30 m. ¿Cuánto mide el área de la proyección de una cara lateral sobre la base de la pirámide?

**Resolución:**




Se tiene: $h = 1{,}20$ m
Arista lateral: $a = 1{,}30$ m

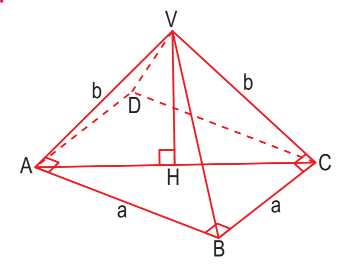
En el triángulo rectángulo PHA:

$AH = \sqrt{(1{,}3)^2 - (1{,}2)^2} \Rightarrow AH = 0{,}5$ m

Luego: $A_{\triangle ADH} = \frac{1}{2}(0{,}5)^2 = 0{,}125$ m$^2$

**2** Las cuatro aristas laterales de una pirámide de base cuadrada son iguales entre sí y forman ángulos de 60° con dicha base. ¿Cuál es la longitud de la arista si el área de la base mide 72 m$^2$?

**Resolución:**




En el triángulo rectángulo ABC:
$AC^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$

Pero: $a^2 = 72$ m$^2$, entonces:

$AC^2 = 144$, de donde $AC = 12$, luego $HC = 6$.

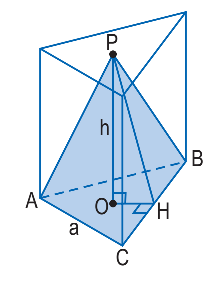
En el triángulo rectángulo VHC:

$m\angle HCV = 60°$, luego $m\angle HVC = 30°$, entonces:

$HC = \frac{1}{2}b$, de donde: $b = 12$ m

**3** ¿Cuál debe ser la longitud de la altura de un prisma de base triangular regular, si la pirámide de la misma base y altura, tiene la misma área lateral que el prisma? La arista de la base es 36.

**Resolución:**




De la figura:
El $\triangle ABC$ es equilátero, entonces:

$OH = \frac{a\sqrt{3}}{6} = ap$

Del dato:
$A_L(\text{pirámide}) = A_L(\text{prisma})$

$$\begin{pmatrix}\text{semiperímetro}\\ \text{de la base}\end{pmatrix}(\text{apotema}) = \begin{pmatrix}\text{perímetro}\\ \text{de la base}\end{pmatrix}(\text{altura})$$

$$\frac{3a}{2}\sqrt{h^2 + \frac{a^2}{12}} = 3ah$$

$$\sqrt{h^2 + \frac{a^2}{12}} = 2h$$

$$h^2 + \frac{a^2}{12} = 4h^2$$

$$a^2 = 36h^2$$

$$a = 6h \Rightarrow h = \frac{a}{6}$$

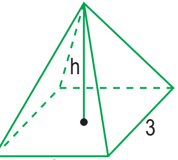
Pero: $a = 36 \Rightarrow h = 6$

**4** Se tiene un segmento de longitud 12, luego se construye un cuadrado y un triángulo equilátero de perímetros iguales a la longitud del segmento. Halla la relación de volúmenes de las pirámides, cuyas bases son las indicadas arriba y con la misma altura.

**Resolución:**

Graficamos el enunciado:

(1)


$V_1 = \frac{1}{3}A_Bh$

$V_1 = \frac{1}{3}(3)^2h$

$V_1 = 3h$

(2)




$V_2 = \frac{1}{3}A_Bh$

$V_2 = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}(4)^2\sqrt{3}\,h$

$V_2 = \frac{4}{3}\sqrt{3}\,h$

Luego:

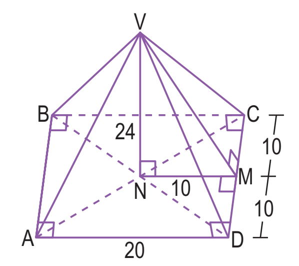
$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{3\cdot 3}{4\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

**5** En una pirámide cuadrangular regular, su altura mide 24 cm y el lado de la base mide 20 cm. Calcula su área lateral, total y su volumen.

**Resolución:**

Si la pirámide es cuadrangular regular, entonces la base es un cuadrado y las caras laterales son triángulos isósceles congruentes.

Graficamos:




En el ⊿VNM:
$VM^2 = 24^2 + 10^2$
$VM = 26$ cm

Área lateral ($A_L$):
$A_L = (p_{ABCD})(VM)$
$A_L = (40)(26)$
$A_L = 1040\ cm^2$

Área total ($A_T$):
$A_T = A_L + A_{BASE}$
$A_T = 1040 + 20^2$
$A_T = 1440\ cm^2$

Volumen (V):

$V = \frac{1}{3}(A_{ABCD})(VN)$

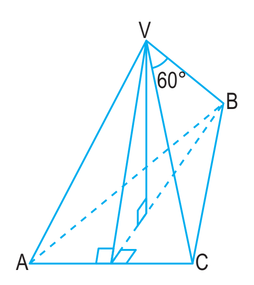
$V = \frac{1}{3}(20^2)(24)$

$V = 3200\ cm^3$

**6** El volumen de una pirámide triangular regular V-ABC es $72\ m^3$. Calcula su área total si se sabe que la medida del ángulo CVB es 60°.

**Resolución:**

Graficamos el sólido sabiendo que la base es un triángulo equilátero:




Por ser pirámide triangular regular:
VC = VB = VA
$m\angle CVB = 60° \Rightarrow VC = VB = BC$

Entonces, V-ABC es un tetraedro regular.

Por fórmula del tetraedro regular:

$$V = \frac{(AC)^3\sqrt{2}}{12} = 72\ m^3$$

$$AC = 6\sqrt{2}\ m$$

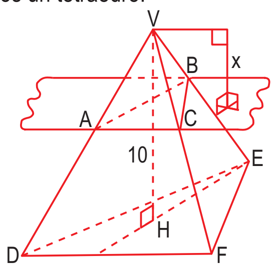
$A_T = (AC)^2\sqrt{3}$

$A_T = (6\sqrt{2})^2\sqrt{3} = 72\sqrt{3}\ m^2$

**7** ¿A qué distancia del vértice de una pirámide cuya altura mide 10 se debe trazar un plano paralelo a la base para que se determinen dos sólidos equivalentes?

**Resolución:**

En este tipo de problemas no interesa cuántos lados tenga la base, consideremos un tetraedro:




Por ser sólidos equivalentes entonces:
$V_{V-ABC} = V_{ABC-DEF} = V$

Por sólidos semejantes:

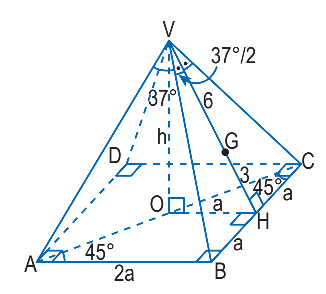
$$\frac{V_{V-ABC}}{V_{V-DEF}} = \left(\frac{x}{10}\right)^3$$

$$\frac{V}{2V} = \frac{x^3}{1000}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{x^3}{1000} \Rightarrow x = 5\sqrt[3]{4}$$

**8** En una pirámide cuadrangular regular V-ABCD, si $m\angle AVB = 37°$ y la distancia del vértice de dicha pirámide al baricentro de una de las caras laterales mide 6 m. Calcula el volumen de dicha pirámide.

**Resolución:**




Por dato: G es baricentro del △BVC
$\Rightarrow VG = 2(GH)$
$6 = 2(GH) \Rightarrow GH = 3$

En el ⊿VHC notable de $\frac{37°}{2}$: HC = 3
$\Rightarrow a = 3$

En el ⊿VOH por el teorema de Pitágoras:
$h^2 + a^2 = (9)^2$
$h^2 + 3^2 = 81 \Rightarrow h = 6\sqrt{2}$

Piden: el volumen de la pirámide regular (V)

$$V = \frac{1}{3}(A_B)h = \frac{1}{3}(2a)^2(6\sqrt{2})$$

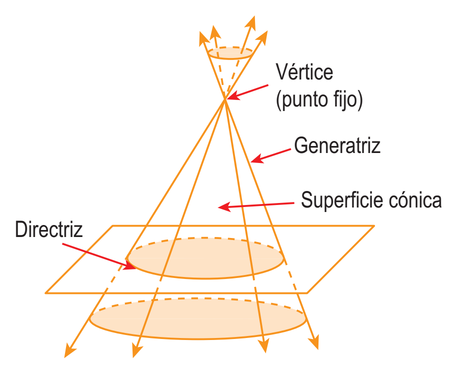
$\Rightarrow V = 8a^2\sqrt{2} = 8(3)^2\sqrt{2}$

$\therefore V = 72\sqrt{2}\ m^3$




## SUPERFICIE CÓNICA

Superficie generada por una recta denominada generatriz que se desplaza por un punto fijo y por todos los puntos de una línea curva coplanar y no secante a sí misma, la cual también se denomina directriz.




**Elementos**

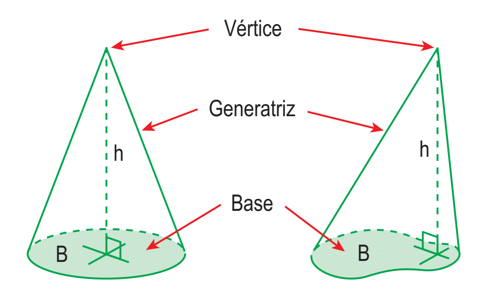
**Vértice:** punto fijo y único vértice del cono.

**Directriz:** línea curva por donde se desplaza la generatriz.

**Generatriz:** recta limitada por el vértice y la directriz.

## CONO

Sólido geométrico o región del espacio limitado por una superficie cónica y un plano secante a sus generatrices que no contiene vértices.



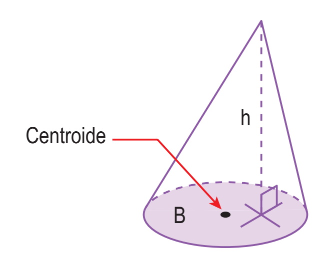

**Vértice:** único vértice en el cono.

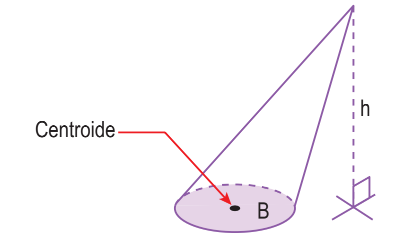
**Base:** plano secante a las generatrices no tiene vértice.

**Generatriz:** recta limitada por el plano secante y el vértice.

### Clasificación

**Cono oblicuo.** Cono cuyo pie de altura no coincide con el centroide de su base.




Donde:
B: área de la base.
h: altura.

| Volumen (V) | Área de la superficie total ($S_T$) |
| --- | --- |
| $V = \frac{B\,h}{3}$ | $A_{ST} = A_{SL} + B$ |

$A_{SL}$: área de la superficie lateral.

**Observación**

Al centroide se le conoce como centro de masa de una región sin masa en un plano. Para nuestro caso la base.

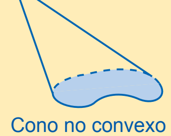


**Atención**

Un cono se clasifica en convexo y no convexo.
Los conos convexos se dividen en rectos y oblicuos, a su vez el cono recto se divide en: cono de revolución y de elipse.



Cono convexo

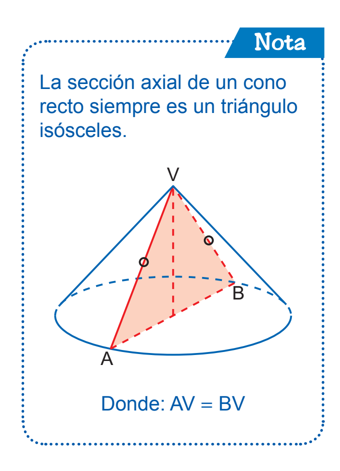


Cono no convexo



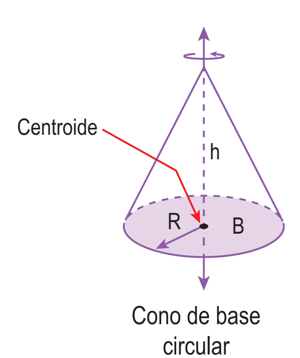
**Nota**

La sección axial de un cono recto siempre es un triángulo isósceles.

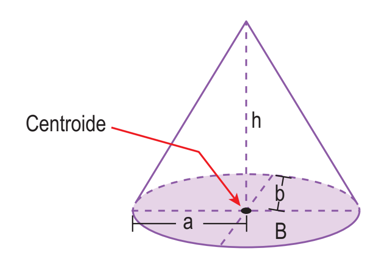



Donde: AV = BV

**Cono recto.** Cono cuyo pie de altura coincide con el centroide de la base.




Cono de base circular




Cono de base elíptica

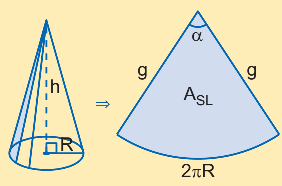
Donde:
B: área de la base.
h: altura.

| Volumen (V) | Área de la superficie total ($S_T$) |
|---|---|
| $V = \frac{Bh}{3}$ | $A_{ST} = A_{SL} + B$ |

$A_{SL}$: área de la superficie lateral.

**Atención**

La superficie lateral del cono de revolución tiene una forma particular.




Donde:

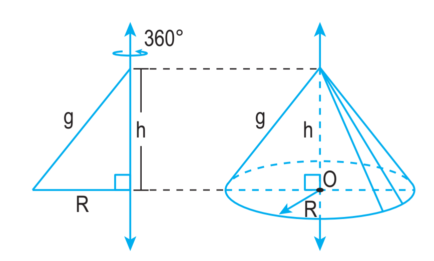
$\alpha = \frac{R}{g} 360°$

$A_{SL} = \frac{\pi g^2 . \alpha}{360°} = \pi Rg$

α: ángulo de desarrollo.



## Desarrollo de un cono de revolución




Donde:

g: generatriz del cono.

h: altura del cono.

R: radio de la base del cono.

Por Pitágoras : $g^2 = h^2 + R^2$

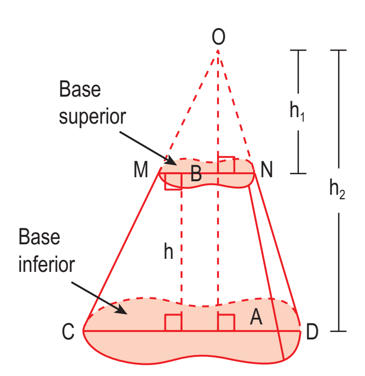
Además:

| Área de superficie lateral ($A_{SL}$) | Área total ($A_T$) | Volumen (V) |
|---|---|---|
| $A_{SL} = \pi Rg$ | $A_T = \pi R(g + R)$ | $V = \frac{1}{3}\pi R^2 h$ |



## Tronco de cono

Porción de cono comprendida entre la base del cono y la sección determinada por un plano secante, paralelo al plano de la base.




Donde:

h: altura del tronco de cono ($h_2 - h_1$).
A y B: áreas de las bases.

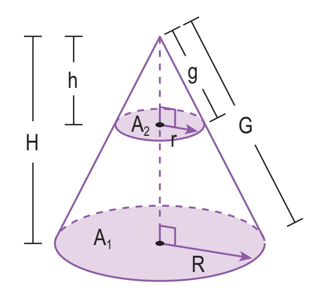
Volumen (V)

$V_{(\text{Tronco de cono})} = \frac{h}{3}(A + B + \sqrt{AB})$



## Semejanza de conos

Si dos conos son generados por triángulos rectángulos semejantes que giran alrededor de los lados homólogos, dichos conos son semejantes.




Se cumple:

$$\frac{R}{r} = \frac{G}{g} = \frac{H}{h}$$

R y r: radios.

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{H^2}{h^2} = \frac{G^2}{g^2} = \frac{R^2}{r^2}$$

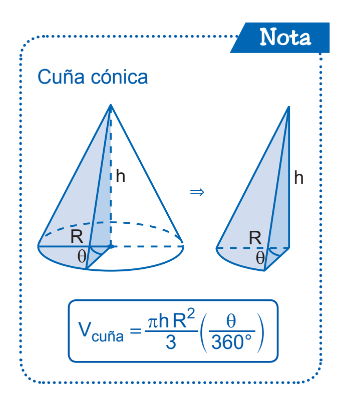
A: área de la base.

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{H^3}{h^3} = \frac{G^3}{g^3} = \frac{R^3}{r^3}$$

V: volumen del cono.

**Nota**

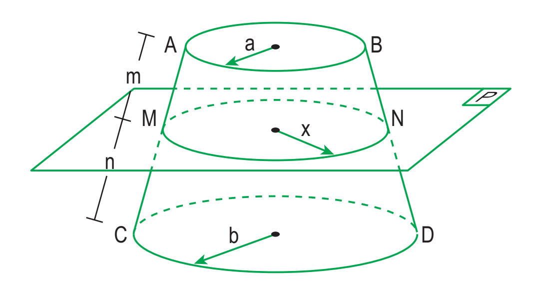
Cuña cónica




$$V_{cuña} = \frac{\pi h R^2}{3}\left(\frac{\theta}{360°}\right)$$

## Teorema de tronco de cono de revolución

En todo tronco de cono de revolución, al trazar un plano secante a su superficie lateral y paralelo a las bases, se determina un círculo cuyo radio se relaciona con las radios de las bases y las longitudes de los segmentos determinados en la generatriz del tronco de cono.




Si: ▱P es paralelo a las bases.

$$\Rightarrow \quad x = \frac{an + bm}{n + m}$$

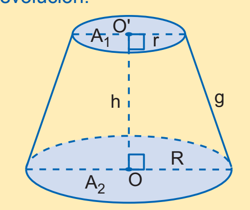
Donde:

a; b; x: radios de las circunferencia.

n = CM ; m = MA

**Observación**

Para un tronco de cono de revolución.




$A_1$: área de la base menor.

$A_2$: área de la base mayor.

$\overline{OO'}$: altura del tronco de cono.

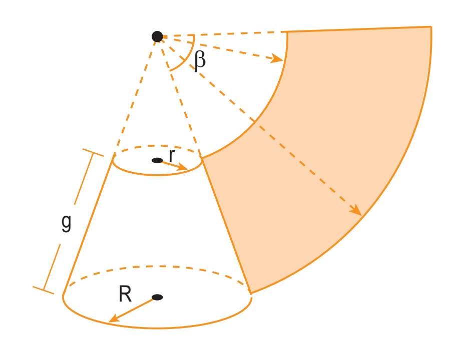
g: generatriz.

V: volumen.

$V = \frac{1}{3}\pi h(R^2 + r^2 + Rr)$



**Desarrollo de la superficie lateral del tronco de cono**




$$A_T = \pi g(R + r) + \pi R^2 + \pi r^2$$

$A_T$: área total.

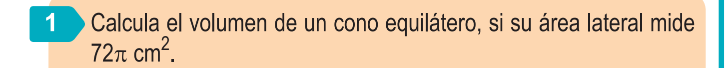
$$A_{SL} = \pi g(R + r)$$

$A_{SL}$: área de la superficie lateral.

$$\beta = 360° \frac{(R - r)}{g}$$

β: medida del ángulo del desarrollo.

# Problemas resueltos



**1** Calcula el volumen de un cono equilátero, si su área lateral mide $72\pi$ cm$^2$.

**Resolución:**

Un cono equilátero es aquel en el cual su sección axial es un triángulo equilátero.

El $\triangle ABC$ es la sección axial del cono equilátero.

Entonces:
En el ⊿CRB notable (30° y 60°): $g = 2R \wedge h = R\sqrt{3}$

Por dato: $A_L = 72\pi$ cm$^2$

$\pi R \,.\, (g) = 72\pi$

$\pi R \,.\, (2R) = 72\pi$

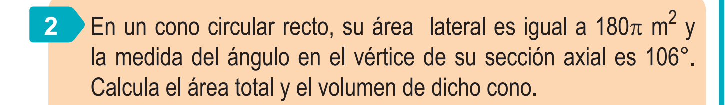
$R^2 = 36 \Rightarrow R = 6$

Piden el volumen del cono (V) :

$$V = \frac{\pi R^2 \,.\, h}{3} = \frac{\pi R^2 \,.\, (R\sqrt{3})}{3}$$

$$= \frac{\pi R^3\sqrt{3}}{3} = \frac{\pi(6)^3\sqrt{3}}{3} = 72\pi\sqrt{3}$$

$\therefore V_{cono} = 72\pi\sqrt{3}$ cm$^3$



**2** En un cono circular recto, su área lateral es igual a $180\pi$ m$^2$ y la medida del ángulo en el vértice de su sección axial es 106°. Calcula el área total y el volumen de dicho cono.

**Resolución:**

El $\triangle ABC$ es la sección axial del cono.

Por dato: $m\angle ABC = 106°$

$\Rightarrow m\angle ABO = m\angle CBO = 53°$

En el ⊿COB notable (37° y 53°):
$R = 4k$, $h = 3k$ y $g = 5k$

Además:

$A_L = 180\pi$ m$^2$

$\pi Rg = 180\pi$ m$^2$

$\pi(4k)(5k) = 180\pi$

$20k^2 = 180$

$k^2 = 9 \Rightarrow k = 3$

Entonces: $R = 12$ m, $h = 9$ m y $g = 15$ m

Piden:
El área total ($A_T$):

$A_T = \pi R(g + R)$

$A_T = \pi\,(12)(15 + 12)$

$A_T = \pi(12)(27) = 324\pi$

$\therefore A_T = 324\pi$ m$^2$

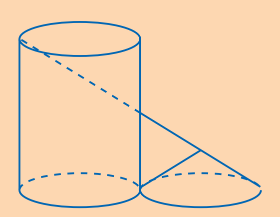
El volumen del cono (V):

$$V = \frac{\pi R^2 \,.\, h}{3}$$

$$V = \frac{\pi(12)^2(9)}{3} = 432\pi$$

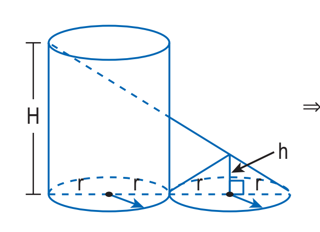
$\therefore V = 432\pi$ m$^3$

**3** En el gráfico, calcula la razón de los volúmenes de los sólidos mostrados, si sus bases son equivalentes.

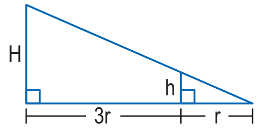


**Resolución:**

Si las bases son equivalentes, entonces tienen el mismo radio.




$\Rightarrow$




Por semejanza de triángulos:

$$\frac{H}{4r} = \frac{h}{r} \Rightarrow H = 4h$$

El volumen del cilindro ($V_1$):

$V_1 = \pi r^2 H = \pi r^2 (4h)$

$V_1 = 4\pi r^2 h$ ...(I)

El volumen del cono ($V_2$):

$$V_2 = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

$$V_2 = \frac{\pi r^2 h}{3} \quad \text{... (II)}$$

Dividimos (I) y (II):

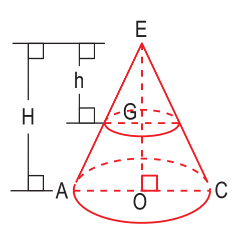
$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{4\pi r^2 h}{\frac{\pi r^2 h}{3}} = 12 \Rightarrow \frac{V_{cilindro}}{V_{cono}} = \frac{12}{1}$$

**4** Dado un cono de revolución de vértice E y volumen 54 cm$^3$, se traza un diámetro AC en el círculo de la base. Halla el volumen del tronco de cono que se determina al trazar un plano paralelo a la base, por el baricentro de la región triangular AEC.

**Resolución:**

$V_{tronco} = ?$

$V_{cono\ total} = 54$ cm$^3$




Como G es baricentro del $\triangle AEC$:

$$\frac{h}{H} = \frac{2}{3}$$

Se tendrá:

$V_{tronco} = V_{cono\ total} - V_{cono\ parcial}$

$V_{tronco} = 54\ cm^3 - V_{cono\ parcial}$ ... (1)

Por otro lado, semejanza entre los conos:

$$\frac{V_{cono\ parcial}}{V_{cono\ total}} = \left(\frac{h}{H}\right)^3 \Rightarrow \frac{V_{cono\ parcial}}{54\ cm^3} = \left(\frac{2}{3}\right)^3$$

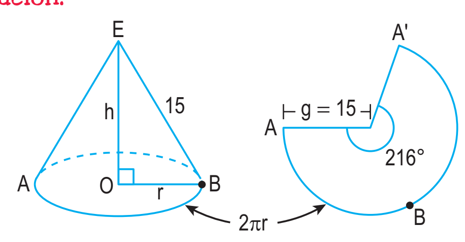
$V_{cono\ parcial} = 16$ cm$^3$

Reemplazando en (1):

$\therefore V_{tronco} = 38$ cm$^3$

**5** El desarrollo de la superficie lateral de un cono de revolución es un sector circular de radio 15 cm y cuyo ángulo central mide 216°. Halla el volumen del cono original.

**Resolución:**




La generatriz del cono mide igual que el radio del sector en el desarrollo de la superficie lateral.

$\Rightarrow g = 15$

$L_{\overset{\frown}{ABA'}} = 2\pi g\left(\frac{216°}{360°}\right)$

$\Rightarrow 2\pi r = 2\pi 15\left(\frac{216°}{360°}\right)$

$\therefore r = 9$

En el cono:

$h^2 = g^2 - r^2 = 15^2 - 9^2 \Rightarrow h = 12$

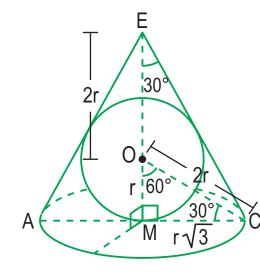
Finalmente, hallamos el volumen del cono:

$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi 9^2 (12)$

$\therefore V = 324\pi \text{ cm}^3$

**6** Halla el volumen de un cono equilátero, conociendo el radio r de la esfera inscrita en él.

**Resolución:**




Como el cono es equilátero, entonces:

$AE = EC = AC$

$\Rightarrow m\angle ACE = 60°$

y $m\angle MCO = m\angle OCE = 30°$

El volumen:

$V = \frac{1}{3}\pi(MC)^2\, EM$

$V = \frac{1}{3}\pi(r\sqrt{3})^2(3r)$

$\therefore V = 3\pi r^3$

**7** Calcula el área lateral de un cono recto de revolución sabiendo que el segmento mediatriz de una de sus generatrices limitada por la altura del cono mide 4 m y la altura de este sólido mide 10 m.

**Resolución:**

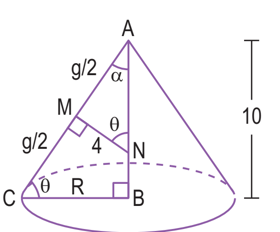
$A_L = \pi R g \quad ...(1)$

$\triangle NMA \sim \triangle CBA$

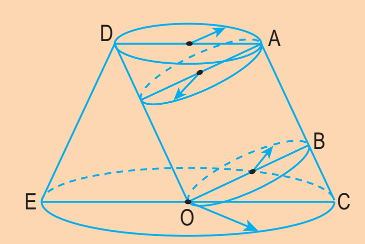
$\frac{\frac{g}{2}}{10} = \frac{4}{R} \Rightarrow gR = 80 \quad ...(2)$

Reemplazamos (2) en (1):

$A_L = 80\pi \text{ m}^2$

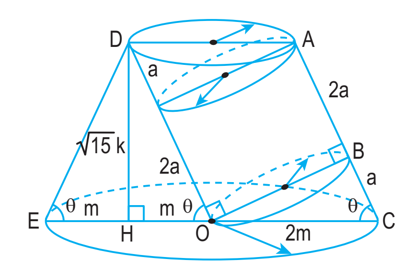



**8** Según la figura, el tronco de cono y el cilindro son de revolución. Si AB = 2(BC), calcula la razón de sus volúmenes.




**Resolución:**

Piden: $\frac{V_{\text{tronco de cono}}}{V_{\text{cilindro}}} = L \quad ...(1)$




Según la figura $\triangle DHO \sim \triangle OBC$:

$\frac{m}{a} = \frac{3a}{2m} \Rightarrow 2m^2 = 3a^2$

Luego: $\frac{m}{a} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$

Entonces: $m = \sqrt{3}k \;\wedge\; a = \sqrt{2}k$

En el $\triangle$ DHO: $DH = \sqrt{15}k$

En el $\triangle$ OBC: $OB = \sqrt{10}k$

Luego:

$V_{\text{cilindro}} = \pi\left(\frac{k\sqrt{10}}{2}\right)^2(2\sqrt{2}k)$

$V_{\text{tronco cono}} = \frac{\pi}{3}(\sqrt{15}k)\left[(2\sqrt{3}k)^2 + (\sqrt{3}k)^2 + (2\sqrt{3}k)(\sqrt{3}k)\right]$

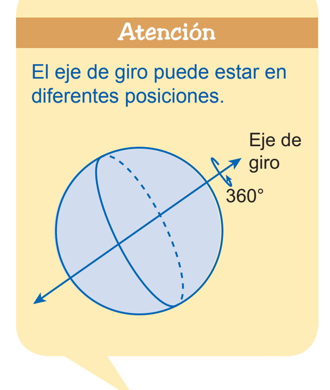
Reemplazamos en (1) y simplificamos:

$\therefore L = \frac{7\sqrt{30}}{10}$

# ESFERA Y SÓLIDOS DE REVOLUCIÓN

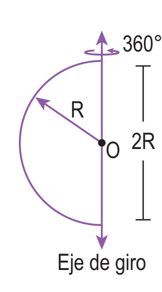
**Atención**

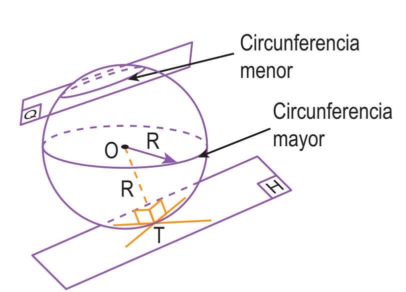
El eje de giro puede estar en diferentes posiciones.




## SUPERFICIE ESFÉRICA

Se denomina superficie esférica al conjunto de todos los puntos que equidistan de un punto fijo del espacio, denominado centro. La distancia que equidista se le llama radio.

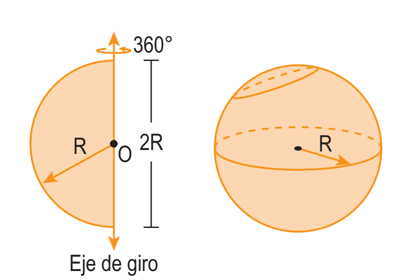



▱Q: plano secante a la esfera.
▱H: plano tangente a la esfera en el punto T ($\overline{OT} \perp$ ▱H).

## ESFERA

Sólido generado por un semicírculo al girar 360°, en torno a su diámetro.




$$A_{SE} = 4\pi R^2$$

$A_{SE}$: área de la superficie esférica

$$V_E = \frac{4}{3}\pi R^3$$

$V_E$: volumen de la esfera

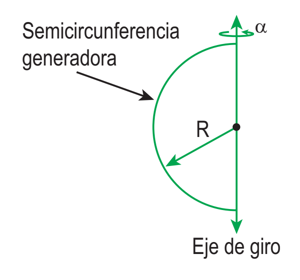
### Huso esférico y cuña esférica

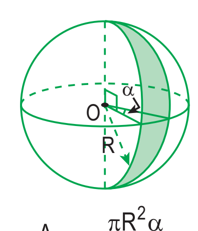
**Huso esférico.** Porción de la superficie esférica comprendida entre dos planos secantes cuya arista pasa por el centro de la superficie esférica.

**Cuña esférica.** Porción de esfera limitada por un huso esférico y los planos que la determinan.

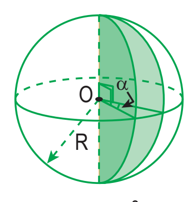
**Nota**

Si te piden el huso esférico y cuña esférica de una semiesfera solo debes dividir entre dos el valor de una esfera.




$$A_{HE} = \frac{\pi R^2 \alpha}{90°}$$



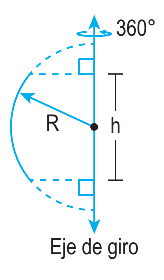

$$V_{CE} = \frac{\pi R^3 \alpha}{270°}$$

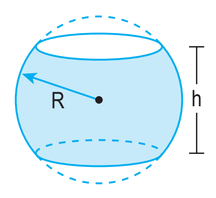
Donde:
$A_{HE}$: área del uso esférico
$V_{CE}$: volumen de la cuña esférica
$\alpha$: medida del ángulo de la cuña o ángulo de giro (en grados sexagesimales).

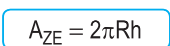
### Zona esférica y segmento esférico de dos bases

**Zona esférica.** Es la porción de superficie esférica comprendida entre dos circunferencias determinadas por dos planos paralelos y secantes a la superficie esférica.

**Segmento esférico de dos bases.** Es la porción de esfera comprendida entre dos planos paralelos entre sí y secantes a la esfera.

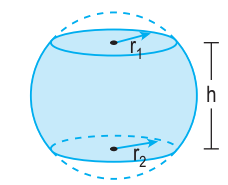


$$A_{ZE} = 2\pi Rh$$

$A_{ZE}$: área de la zona esférica



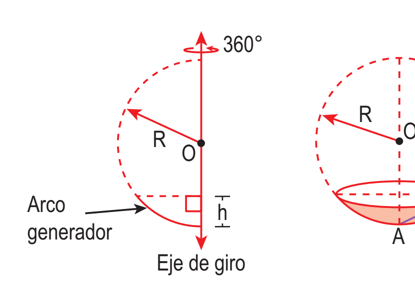

$$V_{SGE} = \frac{\pi h^3}{6} + \frac{\pi r_1^2 h}{2} + \frac{\pi r_2^2 h}{2}$$

$V_{SGE}$: volumen del segmento esférico de dos bases

h: distancia entre los planos paralelos

## Casquete esférico

Es una zona esférica en la cual un extremo generador está ubicado en el eje de giro.



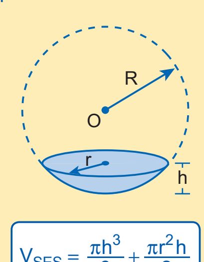

$$A_{CE} = 2\pi Rh$$

$$A_{CE} = \pi(AB)^2$$

$A_{CE}$: área del casquete esférico

**Atención**

Segmento esférico de una base; es la porción de esfera limitada por el casquete esférico y un círculo menor correspondiente.

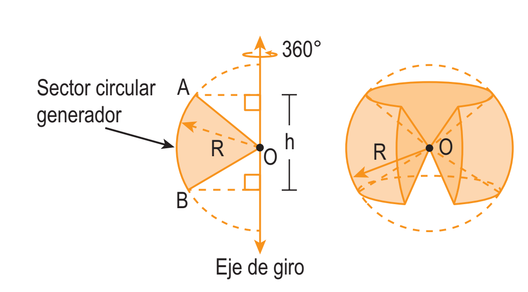



$$V_{SES} = \frac{\pi h^3}{6} + \frac{\pi r^2 h}{2}$$



## Sector esférico

Es aquel sólido generado por un sector circular al girar 360° en torno a un diámetro del círculo correspondiente, estando el sector en un mismo semiplano respecto del eje de giro.



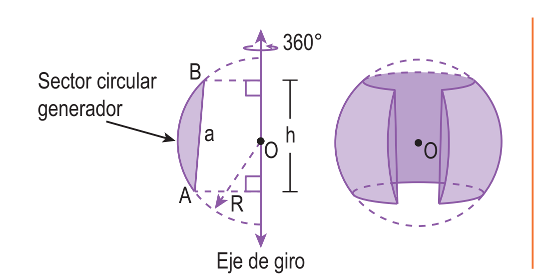

$$V_{SE} = \frac{2}{3}\pi R^2 h$$

h: longitud de la proyección ortogonal del arco AB sobre el eje de giro.

$V_{SE}$: volumen del sector esférico

## Anillo esférico

Es el sólido generado por un segmento circular al girar 360° en torno a un diámetro del círculo correspondiente, estando el segmento circular en un mismo semiplano respecto al eje de giro.




$$V_{AE} = \frac{1}{6}\pi a^2 h$$

h: longitud de la proyección ortogonal del arco AB sobre el eje de giro

a: longitud de la cuerda AB

$V_{AE}$: volumen del anillo esférico

## TEOREMA DE PAPPUS - GULDIN

**Superficie de revolución;** el área de la superficie generada por una línea plana al girar 360° en torno a una recta coplanar y no secante a dicha línea es igual al producto de la longitud de la línea y de la longitud de la circunferencia que describe su centroide.

**Observación**

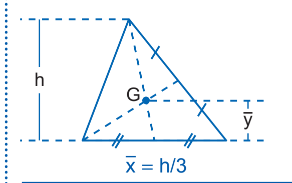
El anillo esférico se puede hallar (el volumen) restando el segmento esferico de dos bases menos el tronco del cono de revolución.



**Nota**

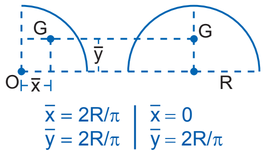
**Centro de gravedad de algunas figuras geométricas conocidas**

Triángulo



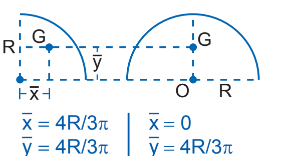

$\bar{x} = h/3$

Cuarto de circunferencia | Semi-circunferencia



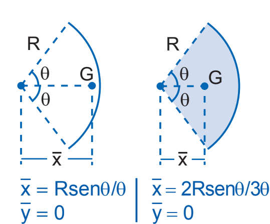

$\bar{x} = 2R/\pi$ | $\bar{x} = 0$
$\bar{y} = 2R/\pi$ | $\bar{y} = 2R/\pi$

Cuarto de círculo | Semicírculo




$\bar{x} = 4R/3\pi$ | $\bar{x} = 0$
$\bar{y} = 4R/3\pi$ | $\bar{y} = 4R/3\pi$

Arco de circunferencia | Sector circular

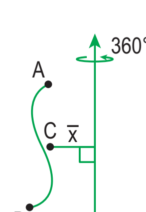


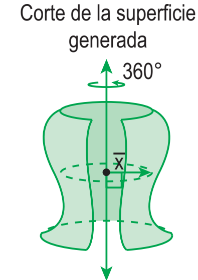

$\bar{x} = R\text{sen}\theta/\theta$ | $\bar{x} = 2R\text{sen}\theta/3\theta$
$\bar{y} = 0$ | $\bar{y} = 0$

Trapecio

B b G h B b

$$\bar{y} = \left(\frac{B + 2b}{B + b}\right)\frac{h}{3}$$

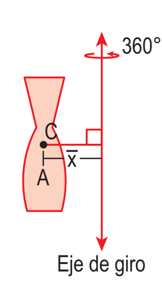


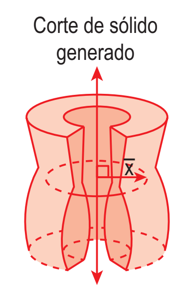




$$A_{SG} = L(2\pi\bar{x})$$

$A_{SG}$: área de la superficie generada
L: longitud de la línea AB
C: centroide o centro de gravedad de la línea AB
$\bar{x}$: radio de la circunferencia descrita por el centroide

**Sólido de revolución;** generado por una región plana al girar 360° en torno a una recta coplanar y no secante a dicha región es igual al valor del área de la región multiplicado por la longitud de la circunferencia que describe su centroide.



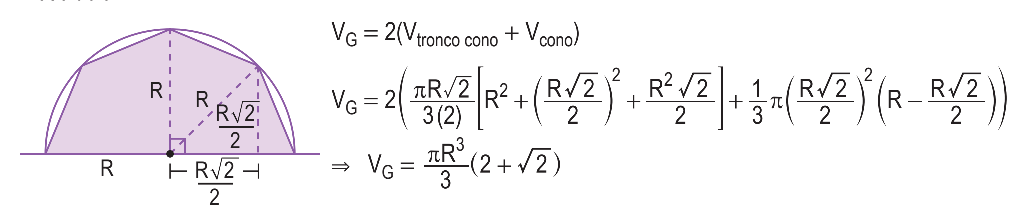

$$V_{SG} = A(2\pi\bar{x})$$

$V_{SG}$: volumen del sólido generado
A: área de la región generadora
C: centroide o centro de gravedad de la región A
x: radio de la circunferencia descrita por el centroide

Ejemplos:

1. Se tiene un semioctógono regular inscrito en una circunferencia de diámetro 2R. Halla el volumen del sólido que se genera al rotar alrededor de su diámetro.

Resolución:



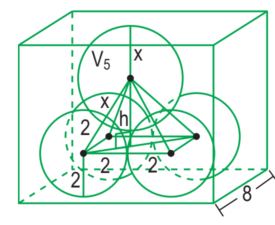

$$V_G = 2(V_{\text{tronco cono}} + V_{\text{cono}})$$

$$V_G = 2\left(\frac{\pi R\sqrt{2}}{3(2)}\left[R^2 + \left(\frac{R\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{R^2\sqrt{2}}{2}\right] + \frac{1}{3}\pi\left(\frac{R\sqrt{2}}{2}\right)^2\left(R - \frac{R\sqrt{2}}{2}\right)\right)$$

$$\Rightarrow V_G = \frac{\pi R^3}{3}(2 + \sqrt{2})$$

2. Cuatro esferas congruentes de radios r = 2 están inscritas en un cubo de tal manera que son tangentes a la base y a las caras laterales consecutivas 2 a 2. Halla el volumen de una quinta esfera que es tangente a las cuatro esferas dadas y a la cara opuesta.

Resolución:

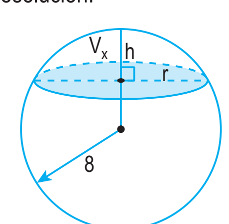



Piden:
$V_5 = ?$
$V_5 = 4/3\ \pi x^3$
$8 = 2 + x + h_{\text{pirámide cuad. regular}}$ ... (1)

$h^2 = (2 + x)^2 - (2\sqrt{2})^2$
$\Rightarrow h^2 = (6 - x)^2$
$(2 + x)^2 - 8 = (6 - x)^2 \Rightarrow x = \frac{5}{2}$
$\Rightarrow V_5 = 4/3\pi\left(\frac{5}{2}\right)^3 = \frac{125}{6}\pi u^3$

3. Calcula el volumen de un segmento esférico de una base, si el radio de la esfera mide 8 u y el área de la superficie que limita es los 7/16 del área de la superficie esférica.

Resolución:




Piden: $V_x$
Dato: $A_{V_x} = \frac{7}{16}A_{ESF.}$
$\pi r^2 + 2\pi 8h = \frac{7}{16}4\pi(64)$
$r^2 + 16h = 112$
Pero: $r^2 = h(16 - h)$

$h(16 - h) + 16h = 112 \Rightarrow h = 4$
$r = 4\sqrt{3}$
$V_x = \frac{\pi 4^3}{6} + \frac{\pi(4\sqrt{3})^2 4}{2}$
$V_x = \frac{320\pi}{3}u^3$

# Problemas resueltos

**1** Una esfera es seccionada por un plano que dista 12 m del centro de la esfera. El radio de la sección obtenida mide 9 m. Calcula el volumen de la esfera.

**Resolución:**

Graficamos la esfera y la sección, la cual no es necesariamente paralela al círculo máximo.

Por Pitágoras:

$12^2 + 9^2 = R^2$

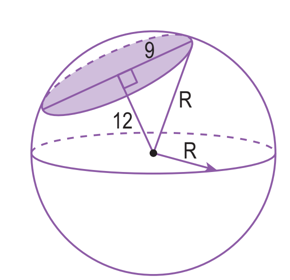
$R = 15$

Hallamos el volumen:

$V = \frac{4}{3}\pi R^3$

$V = \frac{4}{3}\pi (15)^3$

$V = 4500\pi\ m^3$




**2** P es un punto exterior a una esfera de centro O. Se trazan todas las rectas tangentes a la superficie esférica desde P, formándose un cono equilátero cuya base es un círculo menor de la esfera. Halla la relación de volúmenes entre el cono y la esfera.

**Resolución:**

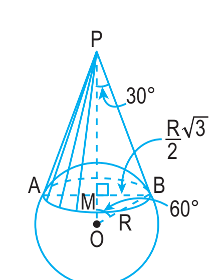
Por ser el cono equilátero, el $\triangle APB$ es equilátero.

Sea R el radio de la esfera.

$\triangle OMB \Rightarrow MB = \frac{R}{2}\sqrt{3}$

$\triangle PMB \Rightarrow PM = (MB)\sqrt{3}$

$\Rightarrow PM = \left(\frac{R}{2}\sqrt{3}\right)\sqrt{3} = \frac{3}{2}R$

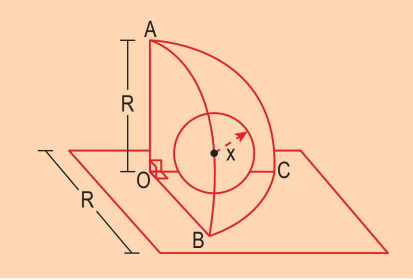



Luego:

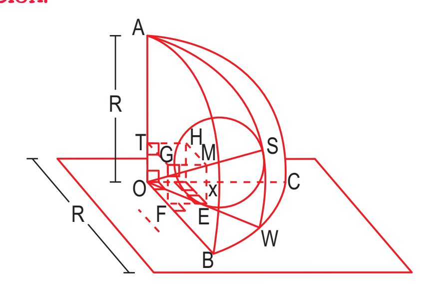
$$\frac{V_{cono}}{V_{esf.}} = \frac{\frac{\pi}{3}(MB)^2 PM}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{(MB)^2 PM}{4R^3}$$

$$\therefore \frac{V_{cono}}{V_{esf.}} = \frac{\left(\frac{R}{2}\sqrt{3}\right)^2 \frac{3}{2}R}{4R^3} = \frac{9}{32}$$

**3** La figura muestra una esfera inscrita en un octavo de esfera de radio R. Halla el radio de la esfera.




**Resolución:**




Sea M el centro de la esfera.

S es el punto de tangencia de ambas superficies esféricas.

E, G y H son puntos de tangencia, de la superficie esférica, con los planos BOC, AOB y AOC, respectivamente.

$\overline{OM}$ es diagonal del cubo formado cuya arista tiene longitud igual al radio x de la esfera.

En el plano AOW: $OS = R$ y $MS = x$

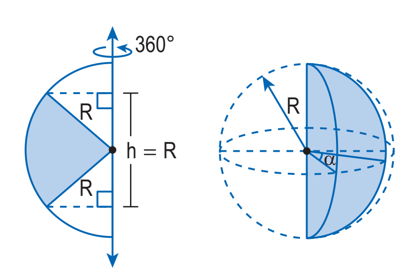
Pero, para el cubo: $OM = x\sqrt{3}$

Entonces: $OM + MS = OS$

$\therefore x\sqrt{3} + x = R \Rightarrow x = \frac{R}{2}(\sqrt{3} - 1)$

**4** Calcula el volumen de una cuña esférica equivalente a un sector esférico, ambos en una misma esfera, de radio 3 cm. Dicho sector es generado por un sector circular, cuya proyección de su arco tiene por longitud la mitad del diámetro correspondiente.

**Resolución:**




Por dato: $R = 3$ cm

Además: $V_{SE} = V_{CE}$

$\frac{2}{3}\pi R^2 h = \frac{\pi R^3 \alpha}{270°}$

$\frac{2}{3}\pi R^2 (R) = \frac{\pi R^3 \alpha}{270°}$

$\frac{2(270°)}{3} = \alpha \Rightarrow \alpha = 180°$

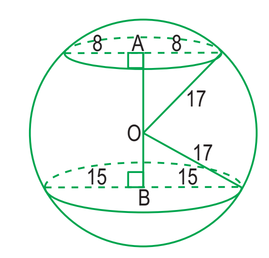
Piden el volumen de la cuña esférica ($V_{CE}$):

$V_{CE} = \frac{\pi R^3 \alpha}{270°} = \frac{\pi (3)^3 (180°)}{270°} = 18\pi$

$\therefore\ V_{CE} = 18\pi\ cm^3$

**5** En una esfera cuyo radio mide 17 cm, los radios de las bases de un segmento esférico miden 8 cm y 15 cm. Calcula el área de la mayor zona esférica correspondiente.

**Resolución**




Piden: $A_{ZE}$

$A_{ZE}$: área de la zona esférica

$A_{ZE} = 2\pi Rh$ ...(1)

$h = OA + OB$ ...(2)

Por el teorema de Pitágoras:

$h = \sqrt{17^2 - 8^2} + \sqrt{17^2 - 15^2}$

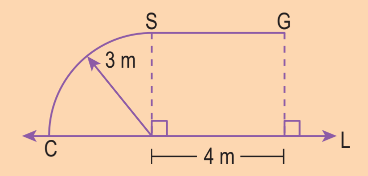
$h = 23$ ...(3)

Reemplazamos (3) en (1):

$A_{ZE} = 2\pi(17)(23)$

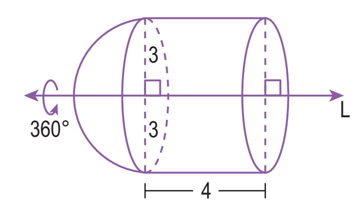
$\therefore\ A_{ZE} = 782\pi \text{ cm}^2$

**6** Calcula el área de la superficie que se genera por la línea CSG al dar una revolución alrededor de la recta L.




**Resolución:**

El sólido que genera la línea CSG al dar una revolución es el siguiente:



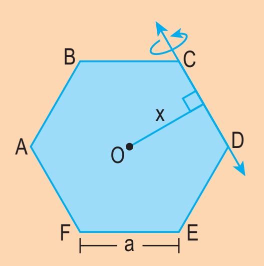

El área generada es igual a la suma del área lateral del cilindro y el área de la semiesfera.

$A_G = A_{L(cilindro)} + A_{semiesfera}$

$A_G = 2\pi(3)4 + \dfrac{4\pi(3^2)}{2}$

$\therefore\ A_G = 24\pi + 18\pi = 42\pi \text{ m}^2$

**7** Halla el volumen del sólido generado al girar la región hexagonal regular ABCDEF, 360° alrededor de la recta CD.




**Resolución:**

Para hallar el volumen pedido aplicamos el teorema de Pappus:

$V = (2\pi\bar{x})(\text{área ABCDEF})$

Donde, x es la distancia del centro O a la recta CD.

En este caso x es la apotema del hexágono.

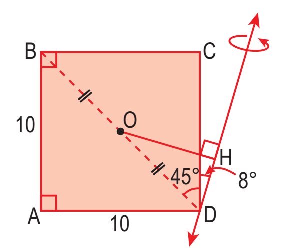
Recordando que la apotema en un hexágono regular mide: $\dfrac{a}{2}\sqrt{3}$

$V = \left(2\pi\dfrac{a}{2}\sqrt{3}\right)\left(\dfrac{3}{2}a^2\sqrt{3}\right)$

$V = \dfrac{9}{2}\pi a^3 \ u^3$

**8** El lado de un cuadrado ABCD mide 10 m. Halla el volumen del sólido generado al girar la región cuadrada, una vuelta, alrededor de un eje coplanar que pasa por el punto D, haciendo un ángulo de 8° con $\overline{CD}$, exteriormente al cuadrado.

**Resolución:**




Incógnita: volumen generado

En el ◺BCD:

$BD = 10\sqrt{2}$

$\Rightarrow OD = \dfrac{BD}{2} = 5\sqrt{2}$

En el ◺OHD:

$m\angle HDO = 53°$

$\Rightarrow OH = 4\sqrt{2}$

Aplicamos el teorema de Pappus:

$V = 2\pi(OH)(AD^2)$

$V = 2\pi(4\sqrt{2})(10^2)$

$\therefore\ V = 800\pi\sqrt{2} \text{ m}^3$